МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.М. Бартенев, А.Н. Дук, М.С. Сазонова,
Е.Г. Ткаченко, В.В. Толстой, Н.В. Целуйко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть III
Раздел “Теория вероятностей и математическая статистика”

Утверждено на заседании Ученого совета академии
как конспект лекций

Днепропетровск НМетАУ 2009

УДК 517 (075.8)

Высшая математика. Часть III. Раздел «Теория вероятностей и математическая статистика». / Г.М. Бартенев, А.Н. Дук, М.С. Сазонова и др.: Конспект лекций. - Днепропетровск: НМетАУ, 2009. - 42 с.

Содержит теоретический материал по указанному разделу дисциплин «Высшая математика» и «Математика для экономистов», излагаемый в соответствии с государственными образовательными профессиональными программами.

Предназначен для студентов экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: А.А. Ивлев, канд. техн. наук, доц. (ГВУЗ)
К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

Раздел 1. ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика возникла в XVI веке как прикладная наука, связанная с азартными играми в карты и кости. Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли уже в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Отсюда французская терминология в комбинаторике. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Бернулли, Лейбница, Эйлера и др.

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из конечного числа различных элементов.

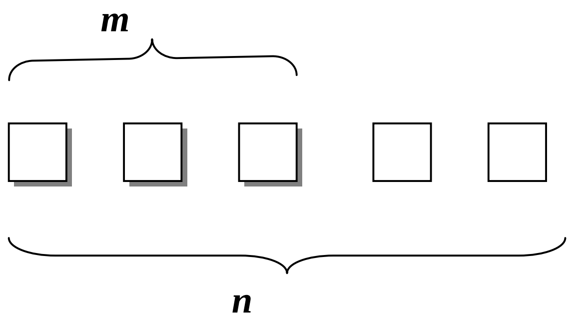
В качестве условий, отличающих одну комбинацию от другой, возьмем состав элементов и их порядок.

<u>Определение 1.1.</u> Комбинации, отличающиеся порядком или составом элементов, называются *соединениями*.

Различают три вида соединений. Кроме того, каждый вид соединений подразделяется на две разновидности в зависимости от того, могут ли повторяться элементы в комбинациях или нет.

<u>Определение 1.2.</u> *Размещениями* называются соединения, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо их порядком.

В соответствии с определением, общее число элементов, из которых составляются комбинации, равно $\boldsymbol{n}$, но в каждую комбинацию включаются не все эти элементы, а только часть из них, а именно - $\boldsymbol{m}$ элементов.



Размещения обозначаются $\boldsymbol{A_n^m}$ (от фр. *arrangement* – размещения) и вычисляются по формуле (без повторений)

$$\boldsymbol{A_n^m} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}) \cdot \ldots \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}+\boldsymbol{1}) = \frac{\boldsymbol{n!}}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{!}},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ - математическая операция вычисления факториала числа.

Если же в комбинации один и тот же элемент может входить не один раз, то размещения с повторениями определяются по формуле

$$A_n^m = n^m \quad .$$

Пример 1.1. Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров, состоящих из различных цифр?

Решение

В данной задаче элементами, из которых составляются комбинации, являются цифры, а комбинациями будут телефонные номера. Комбинации отличаются друг от друга как составом элементов (из десяти цифр 0,1,…,9 используются не все, а только шесть), так и их порядком. Следовательно, соединения являются размещениями. Учитывая, что по условию задачи телефонные номера состоят из различных цифр, это размещения без повторений.

При этом n=10, m=6 и

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200 \quad .$$

Пример 1.2. Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?

Решение

Эта задача отличается от предыдущей только тем, что цифры в телефонных номерах могут повторяться. Следовательно, их общее количество определяется по формуле размещений с повторениями

$$A_{10}^6 = 10^6 \quad .$$

Определение 1.3. *Перестановками* называются соединения, состоящие из одних и тех же n различных элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения этих элементов.

Перестановки (от фр. *permutation* - перестановка) без повторений вычисляются по формуле

$$P_n = n! \quad .$$

Если же в составляемых комбинациях первый элемент повторяется n_1 раз, второй – n_2 раза, …, $k^й$ элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то общее число таких комбинаций, отличающихся друг от друга только порядком следования элементов, определяется по формуле перестановок с повторениями

$$P_{n;n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!} \quad .$$

<u>Пример 1.3.</u> Сколько длинных слов можно составить из 6 разных букв?

<u>Решение</u>

Элементами, из которых образуются комбинации - слова, в данной задаче являются буквы, причем, по условию задачи все элементы различные, т.е. не повторяются. Эпитет “длинных“ свидетельствует о том, что все слова состоят из 6 букв. Все образованные слова (комбинации) будут состоять из одних и тех же букв (элементов) и отличаться друг от друга только порядком букв. Следовательно, общее количество слов будет определяться по формуле перестановок без повторений.

С учетом того, что n=6

$$P_6 = 6! = 720 \quad .$$

<u>Пример 1.4.</u> Сколько длинных слов можно составить из букв А,Б,Б,В,В,В?

<u>Решение</u>

В этой задаче буквы (элементы) будут повторяться:

А – 1 раз;

Б – 2 раза;

В – 3 раза.

Следовательно, общее число слов, состоящих из 6 букв, будет находиться по формуле перестановок с повторениями

$$P_{6;1,2,3} = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = \frac{720}{1\cdot 2\cdot 6} = 60 \quad .$$

<u>Определение 1.4.</u> *Сочетаниями* называются соединения, составленные из n различных элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Сочетания (от фр. *combination* – комбинация) обозначаются C_n^m и определяются по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \quad .$$

Определение 1.5. *Сочетаниями с повторениями* называются соединения, состоящие из m элементов из n возможных, отличающиеся друг от друга или хотя бы одним элементом, или тем, что хотя бы один элемент входит в различные сочетания различное число раз.

В этом случае количество комбинаций определяется по формуле

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} \quad .$$

Пример 1.5. Сколькими различными способами можно выбрать двух волонтеров на обслуживание матчей Евро-2012 от группы, состоящей из 20 студентов?

Решение

Элементами, из которых составляются комбинации (делегация волонтеров), являются студенты. Комбинации будут отличаться друг от друга только составом элементов, порядок же следования элементов для них не важен. Следовательно, составляемые комбинации являются сочетаниями. Так как одного и того же студента нельзя включить в состав делегации несколько раз, т.е. элементы не повторяются, то используем формулу сочетаний без повторений.

В соответствии с условиями задачи n=20, m=2 и

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} = 190 \quad .$$

Пример 1.6. Найти число способов, которыми 7 книг можно распределить между 2 студентами.

Решение

Сформулируем эту задачу несколько иначе: сколькими способами 2 элемента (студента) можно разместить на 7 местах (книгах)?

Таким образом, наши комбинации составляются из 2 элементов (n=2), всего же в каждую комбинацию входит 7 элементов (m=7). Естественно, это может быть только в том случае, если элементы повторяются. Наконец, комбинации отличаются друг от друга или составом элементов, или количеством повторений любого из этих элементов.

Следовательно, воспользуемся формулой сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_2^7} = C_{2+7-1}^7 = C_8^7 = \frac{8!}{7! \cdot (8-7)!} = 8 \quad .$$

Обобщая все вышеизложенное, дадим классификацию соединений и используемые для вычислений формулы в виде следующей схемы.

Соединения

Признаки:	Размещения A_n^m	Перестановки P_n	Сочетания C_n^m
- состав	+	-	+
- порядок	+	+	-

- без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\ ; \qquad P_n = n!\ ; \qquad C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\ ;$$

- с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m\ ; \qquad P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}\ ; \qquad \overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}\ .$$

При определении количества комбинаций, составленных из некоторых разнородных элементов, часто используются правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а объект В – n способами, то выбрать либо А, либо В можно n+m способами.

Пример 1.7. Имеются 3 яблока и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать яблоко или грушу?

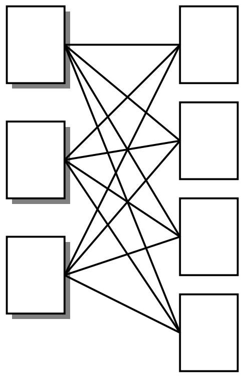
Решение

Яблоко может быть выбрано тремя способами, груша – четырьмя.
Тогда выбор яблока или груши может быть осуществлен 3+4=7 способами.

Правило произведения. Если объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а после такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А+В) может быть выбрана n+m способами.

Пример 1.8. Имеются 3 яблока и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать яблоко и грушу?

Решение



Одно яблоко, из трех имеющихся, можно выбрать 3 способами. Аналогично существует 4 способа выбора груши. Выбор пары “яблоко и груша“ можно сделать $3 \cdot 4 = 12$ способами. Действительно, каждому яблоку соответствует 4 комбинации выбора груши. Таким образом, для 3 яблок таких вариантов 12.

Раздел 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Предмет теории вероятностей

Все явления окружающего мира делятся на детерминированные (определенные) и случайные.

Детерминированными называются явления, которые каждый раз протекают одинаково.

Случайными называются явления, которые при повторении опыта каждый раз протекают по-иному, а сами такие опыты называются случайными.

Исход одного случайного опыта предсказать невозможно. Однако, если рассмотреть большое количество случайных опытов, то можно предвидеть их средний исход.

Предметом теории вероятностей является изучение закономерностей в массе однородных случайных явлений.

Начало систематического исследования задач, связанных с массовыми случайными явлениями и появление соответствующего математического аппарата, относится к XVII веку. В начале этого века знаменитый физик Галилей исследовал ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные величины и оценивая их вероятности. Однако как математическая наука, теория вероятностей сформировалась не на подобных, а на более простых задачах, в которых закономерности случайных явлений проявляются нагляднее, а именно – на задачах, связанных с азартными играми. Здесь следует упомянуть имена Паскаля, Ферма, Якова Бернулли, Муавра, Лапласа, Гаусса и др.

2.2. Основные понятия теории вероятностей

Одним из основополагающих понятий теории вероятностей является понятие события.

Определение 2.2.1. *Событием* называется всякий исход опыта.

Различают случайные, достоверные и невозможные события.

Определение 2.2.2. *Случайным событием* называется любой факт, который может произойти или не произойти в результате опыта или наблюдения.

Обозначение событий осуществляется заглавными буквами латинского алфавита: A,B,C…

Определение 2.2.3. *Достоверным событием* называется такое событие, которое в результате опыта обязательно должно произойти.

Определение 2.2.4. *Невозможным событием* называется событие, которое в результате опыта произойти не может.

Например, при бросании игральной кости выпадение числа меньшего 7 является достоверным событием, большего 6 – невозможным, в интервале от 1 до 6 – случайным.

В теории вероятностей достоверные и невозможные события не рассматриваются. Теория вероятностей изучает закономерности только случайных явлений. А понятия достоверного и невозможного событий используется для количественной оценки возможности появления того или иного события. В связи с этим появляется второе основополагающее понятие теории вероятностей – вероятность.

Определение 2.2.5. *Вероятностью* называется численная мера объективной возможности появления события в данном опыте.

Вероятность принято обозначать символом P.

При этом вероятность достоверного события принята за 1, невозможного – за 0.

Тогда, если A – произвольное случайное событие, то его вероятность

$$0<P(A)<1 .$$

2.3. Виды случайных событий

Определение 2.3.1. События называются *несовместными* в данном опыте, если появление одного из них исключает появление остальных.

Пример2.3.1. Выпадение герба и решки при подбрасывании монеты.

Определение 2.3.2. События называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление других.

Пример2.3.2. Выпадение герба и решки при одновременном подбрасывании двух монет.

Определение 2.3.3. Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Пример2.3.3. Выпадение цифр от 1 до 6 при бросании игральной кости.

Определение 2.3.4. Если два несовместных события образуют полную группу событий, то они называются *противоположными*.

Такие события обозначаются как A и $\overline{A}$.

Пример2.3.4. Выпадение герба и решки при подбрасывании монеты.

Определение 2.3.5. События называются *равновозможными* в данном опыте, если ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Пример2.3.5. Появление цифр от 1 до 6 при выбрасывании игральной кости.

Определение 2.3.6. События называются *неравновозможными*, если хотя бы одно из них является более возможным, чем другие.

Пример2.3.6. При вытаскивании одной карты из колоды событие А, заключающееся в вытаскивании шестерки, является в четыре раза более возможным события В, заключающегося в вытаскивании пиковой шестерки.

Определение 2.3.7. *Случаями* называются несовместные, равновозможные и образующие полную группу события.

Пример2.3.7. Появление цифр от 1 до 6 при выбрасывании игральной кости - случаи. Появление шестерки при вытаскивании одной карты из колоды случаем назвать нельзя, т.к. эти события не образуют полную группу.

Если события удовлетворяют трем условиям – несовместные, равновозможные и образуют полную группу, - то говорят, что опыт ”сводится к схеме случаев”. Такие опыты обязательно симметричны.

2.4. Основные способы вычисления вероятности

Выделяют три основных способа вычисления вероятности:

- классический;
- геометрический;
- статистический.

Первые два способа применяют только в случае симметричных опытов и их называют способами непосредственного подсчета вероятностей.

Классический способ основан на подсчете числа благоприятных исходов опыта среди всех его возможных исходов.

Определение 2.4.1. Случай (исход) называется *благоприятным* (*благоприятствующим*) некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Пример2.4.1. Пусть событие А заключается в выпадении четной цифры при выбрасывании игральной кости. Тогда этому событию благоприятствуют элементарные исходы, заключающиеся в появлении цифр 2, 4 и 6.

Определение 2.4.2. *Вероятностью* события А называется отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов m к общему числу n несовместных, равновозможных исходов, образующих полную группу.

Обозначается

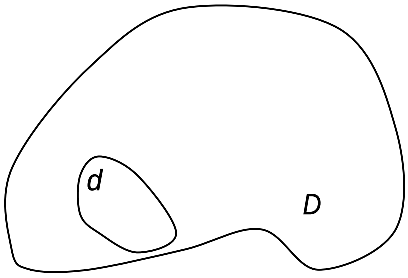
$$P(A) = \frac{m}{n} \quad .$$

Пример2.4.2. Определить вероятность появления четной цифры при бросании игральной кости.

Решение

Пусть событие А заключается в появлении четной цифры. В задаче число благоприятствующих этому событию исходов m=3, общее число исходов опыта n=6. Следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad .$$



Геометрический способ определения вероятностей применяется в том случае, когда число возможных исходов опыта бесконечно.

Пусть имеется некоторая ограниченная область D, каждая точка которой соответствует одному возможному исходу опыта, а также в этой области может быть выделена область d, состоящая их множества точек, соответствующих благоприятным событию А исходам.

Если обозначить размерности этих областей R_D и R_d соответственно, то

$$P(A)=\frac{R_D}{R_d} \quad .$$

Пример2.4.3. Зона действия радиолокатора ограничена углом 120°. Направление появления самолета равновероятно. Определить вероятность обнаружения самолета.

Решение

В данной задаче в качестве размерности областей выступает угол.

Пусть событие А заключается в обнаружении самолета. Этому событию благоприятствует область размерностью R_d =120°, тогда как размерность области D определяется значением R_D =360°. Следовательно,

$$P(A)=\frac{R_D}{R_d}=\frac{120^0}{360^0}=\frac{1}{3} \quad .$$

Статистический способ определения вероятности применяется в случае неравновозможных исходов опыта.

Пусть проведена серия из n^* опытов, в которой некоторое событие А появилось m^* раз.

Определение 2.4.3. *Частотой* (*статистической вероятностью*) события А в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых событие А появилось, к общему числу проведенных опытов.

Обозначив частоту как $P^*(A)$, получим

$$P^*(A)=\frac{m^*}{n^*} \quad .$$

При неограниченном числе опытов $P^*(A) \approx P(A)$.

Пример 2.4.4. Определить статистическую вероятность появления герба, если при 10 подбрасывании монеты он выпал 2 раза.

Решение

Пусть событие А заключается в появлении герба. По условию задачи m^*=2, n^* =10 и $P^*(A)=\frac{m^*}{n^*}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

При небольшом числе опытов частота появления события носит случайный характер и может сильно изменяться в различных сериях опытов.

Однако, при увеличении числа опытов частота утрачивает свой случайный характер и неограниченно приближается к вероятности появления этого события.

В приведенной задаче при неограниченном увеличении числа опытов $P^*(A) \to \frac{1}{2}$.

2.5. Основные теоремы теории вероятностей

В предыдущем разделе мы познакомились со способами непосредственного вычисления вероятностей событий. Однако, применение этих способов не всегда удобно или даже возможно.

В таких случаях применяют не прямые, а косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, связанных с первыми. При этом косвенные методы определения вероятностей базируются на использовании двух основных теорем теории вероятностей: теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей.

Прежде, чем формулировать эти теоремы, дадим понятие суммы и произведения событий.

Определение 2.5.1. *Суммой двух событий* А и В называется событие С, состоящее в выполнении события А, или события В, или их обоих вместе.

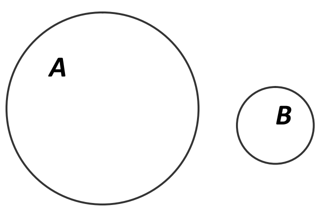
Так как выполнение события А, или события В, или их обоих вместе можно сформулировать как выполнение хотя бы одного из этих событий, то понятию суммы событий можно дать следующую трактовку.

Определение 2.5.2. *Суммой двух событий* А и В называется событие С, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий.

Именно это определение позволяет распространить понятие суммы на несколько событий.

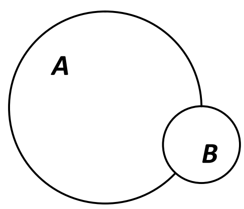
Определение 2.5.3. *Суммой нескольких событий* называется событие, заключающееся в выполнении хотя бы одного из этих событий.

Понятие суммы событий легко трактовать геометрически.



C=A+B

$(C = A \cup B)$



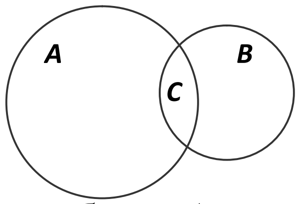
для несовместных событий   для совместных событий

Пример 2.5.1. Пусть событие А состоит в поражении мишени при первом выстреле, а событие В – при втором. Тогда событие С=А+В заключается в поражении мишени вообще, не важно, в каком выстреле.

Определение 2.5.4. *Произведением двух событий* А и В называется событие С, состоящее в совместном выполнении событий А и В.

Определение 2.5.5. *Произведением нескольких событий* называется событие, состоящее в совместном выполнении всех этих событий.

Дадим геометрическую интерпретацию понятия произведения событий.



$$C = A \times B$$
$$(C = A \cap B)$$

Пример2.5.2. Пусть событие А состоит в поражении мишени при первом выстреле, а событие В – при втором. Тогда событие С=А·В заключается в поражении мишени в обоих выстрелах.

2.6. Теоремы сложения вероятностей

Теорема2.6.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad .$$

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad .$$

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \quad .$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad .$$

Как находится вероятность суммы совместных событий мы рассмотрим несколько позже.

Пример 2.6.1. В урне находятся 10 шаров: 5 красных, 3 синих и 2 белых. Определить вероятность извлечения из урны цветного шара.

Решение

Обозначим события:

A - извлечение красного шара;

B - извлечение синего шара;

C - извлечение цветного шара.

События A и B несовместны. Очевидно, что

$$C = A + B \quad .$$

Тогда искомая вероятность

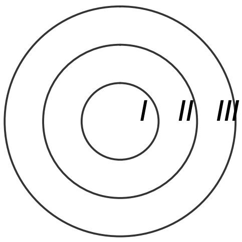
$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) \quad .$$

Учитывая, что $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, то

$$P(C) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad .$$

Пример 2.6.2. Мишень состоит из трех зон – I, II и III, вероятности попадания в которые при одном выстреле равны 0,15 ; 0,20 и 0,18 соответственно. Найти вероятность промаха.

Решение



Рассмотрим события:

$\overline{A}$ - промах;

A - попадание в мишень;

A_1 - попадание в зону I;

A_2 - попадание в зону II;

A_3 - попадание в зону III.

Очевидно, что $A = A_1 + A_2 + A_3$. Так как эти события несовместны, то

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}18 = 0{,}53 \quad .$$

Так как события A и $\overline{A}$ образуют полную группу, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47 \quad .$$

2.7. Теорема умножения вероятностей

Прежде чем формулировать саму теорему, дадим понятие зависимых и независимых событий.

Определение 2.7.1. Событие А называется *независимым* от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Определение 2.7.2. Событие А называется *зависимым* от события В, если его вероятность меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение 2.7.3. Вероятность событие А, вычисленная при условии, что имело место событие В, называется *условной вероятностью* события А.

Условная вероятность обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

Тогда ранее рассматривавшаяся вероятность события А $P(A)$ является *безусловной вероятностью*.

Для независимых событий условная и безусловная вероятности равны:

$$P(A/B) = P(A) \quad .$$

Если события зависимы, то

$$P(A/B) \neq P(A) \quad .$$

Пример 2.7.1. Монета подбрасывается дважды. Являются ли зависимыми события, состоящие в выпадении герба два раза?

Решение

Обозначим события:

А - выпадение герба при первом подбрасывании монеты;

В - выпадение герба при втором подбрасывании монеты.

Вероятность появления герба при первом броске $P(A) = \frac{1}{2}$, при втором - $P(B) = \frac{1}{2}$. Условная вероятность появления герба во втором опыте при условии, что и в первом выпал герб, равна $P(A/B) = \frac{1}{2}$. Так как $P(B/A) = P(B)$, то рассматриваемые события независимы.

Пример 2.7.2. В урне 2 белых и 3 черных шара. Наугад достаются два шара. Является ли зависимым появление белого шара во втором опыте от результатов первого?

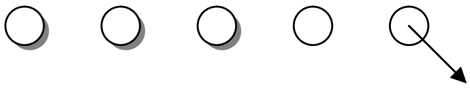
Решение

Рассмотрим события:

А - появление белого шара в первом опыте;

В - появление белого шара во втором опыте.

Тогда $P(A)=\dfrac{2}{5}$. А вот вероятность события В зависит от того, имело ли место событие А. Действительно,



$$P(B/A)=\frac{1}{4}\ ;$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, события А и В являются зависимыми событиями.

Теорема2.7.2. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие имело место:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)\quad .$$

Следствие 1. Вероятность произведения нескольких зависимых событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)\quad .$$

Следствие 3. Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\Big(\prod_{i=1}^{n}A_i\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)\quad .$$

Пример 2.7.3. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Наугад достаются два из них. Определить вероятность появления двух белых шаров.

Решение

Рассмотрим следующие события:

А - появление белого шара в первом опыте;

В - появление белого шара во втором опыте;

С - появление двух белых шаров.

Очевидно, что событие С заключается в выполнении как события А, так и события В:

$$C=A\cdot B\quad .$$

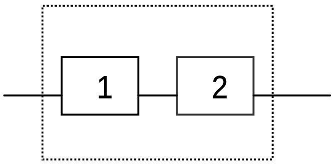
События А и В являются зависимыми событиями. Поэтому

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad .$$

В предыдущем примере были найдены вероятности событий $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$. Тогда $P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Пример 2.7.4. Схема состоит из двух последовательно включенных одинаковых элементов, вероятность безотказной работы которых равна 0,9. Определить надежность всей схемы.

Решение



Под надежностью схемы понимают вероятность ее безотказной работы. Пусть события заключаются в:

А - безотказная работа первого элемента;

В - безотказная работа второго элемента;

С - безотказная работа всей схемы.

События А и В являются независимыми событиями, вероятности появления которых равны:

$$P(A) = P(B) = 0{,}9 \quad .$$

Событие С заключается в выполнении и события А, и события В:

$$C = A \cdot B \quad .$$

С учетом вышесказанного

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81 \quad .$$

Таким образом, при последовательном включении элементов надежность всей схемы ниже надежности любого из ее элементов.

2.8. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 2.8.1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad .$$

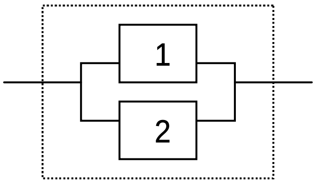
Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Так, для трех событий будем иметь:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C) \; .$$

Для определения вероятностей совместного появления событий следует применять теорему умножения вероятностей.

Пример 2.8.1. Схема состоит из двух параллельно включенных одинаковых элементов с вероятностями безотказной работы 0,9. Определить вероятность безотказной работы всей схемы.

Решение



Рассмотрим события:

A - безотказная работа первого элемента;

B - безотказная работа второго элемента;

C - безотказная работа всей схемы.

Схема сохраняет свою работоспособность, если работает хотя бы один из элементов, т.е.

$$C = A + B \quad .$$

События A и B являются совместными и независимыми событиями. Следовательно,

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \times B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \quad .$$

У нас $P(A) = P(B) = 0{,}9$. Поэтому вероятность безотказной работы предложенной схемы равна

$$P(C) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9 \times 0{,}9 = 1{,}8 - 0{,}81 = 0{,}99 \quad .$$

Итак, при параллельной работе элементов надежность схемы выше надежности составляющих ее элементов.

Пример 2.8.2. Всего имеется 10 экзаменационных билетов. Определить вероятность того, что студент вытащит билет с четным или делящимся на 3 номером.

Решение

Рассмотрим события:

A – вытягивается билет с четным номером;

B - вытягивается билет с делящимся на 3 номером;

C - вытягивается билет с четным или делящимся на 3 номером.

В соответствии с условием задачи

$$C = A + B \quad .$$

События A и B являются совместными событиями – билет №6 относится к ним обоим. Тогда

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \times B) \quad .$$

Наконец, вероятности названных событий равны:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = \frac{3}{10};$$

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{10}.$$

Значит, искомая вероятность равна

$$P(C) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} \ .$$

2.9. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате опыта может произойти хотя бы одно из независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е. все эти события либо их любая часть.

Теорема 2.9.1. Вероятность появления события А, заключающегося в наступлении хотя бы одно из независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$.

Если обозначить $P(A_1) = p_1; P(A_2) = p_2; \ldots; P(A_n) = p_n$, а также $P(\overline{A_1}) = q_1; P(\overline{A_2}) = q_2; \ldots; P(\overline{A_n}) = q_n$, то теорему можно записать в таком виде

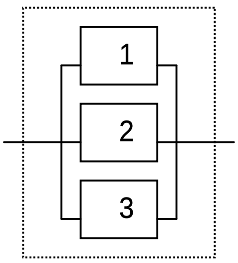
$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n \ .$$

Если все n событий имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одно из них равна

$$P(A) = 1 - q^n \ .$$

Пример 2.9.1. Вероятности безотказной работы трех включенных параллельно элементов равны 0,7; 0,8 и 0,9 соответственно. Определить вероятность безотказной работы схемы.

Решение



Проще всего решается эта задача, если перейти к вероятностям противоположных событий.

Если событие A заключается в безотказной работе схемы, то событие $\overline{A}$ - в ее отказе. Это возможно только при одновременном отказе всех трех элементов.

Пусть события

$\overline{A_1}$ - отказ первого элемента;

$\overline{A_2}$ - отказ второго элемента;

$\overline{A_3}$ - отказ третьего элемента.

Тогда $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. По условию задачи

$$P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Так как события $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ независимы, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006 .$$

Следовательно, вероятность безотказной работы схемы равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994 .$$

<u>Пример 2.9.2.</u> Студент сдает 5 экзаменов, причем вероятности успешной сдачи для отдельных экзаменов равны $p_1 = 0{,}8;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}6;\ p_4 = 0{,}5;\ p_5 = 0{,}4$. Определить вероятность того, что хотя бы один экзамен будет сдан.

<u>Решение</u>

Пусть событие А заключается в успешной сдаче хотя бы одного экзамена. Определим его вероятность через вероятности противоположных событий – провале сразу всех экзаменов:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 = 1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0{,}4) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}0072 = 0{,}9928 .$$

2.10 Формула полной вероятности

Метод вычисления вероятности по формуле полной вероятности предусматривает следующую постановку задачи.

Пусть событие А может произойти только вместе с одним из образующих полную группу несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$. Эти события будем называть *гипотезами*. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

т. е. вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на вероятность события А при этой гипотезе. Это выражение носит название *формулы полной вероятности* и является следствием теоремы сложения и умножения вероятностей. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1 \ .$$

Пример 2.10.1. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

Решение

Обозначим через А событие – извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: H_1 - белых шаров нет, H_2 -один белый шар, H_3 -два белых шара. Т.к. гипотезы равновероятны, то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т.е. $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$.

Сумма вероятностей гипотез равна единице, т.к. они образуют полную группу событий.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что в урне не было белых шаров (гипотеза H_1),

$$P_{H_1}(A) = \frac{1}{3} \ .$$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что в урне был один белый шар (гипотеза H_2),

$$P_{H_2}(A) = \frac{2}{3} \ .$$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что в урне было два белых шара (гипотеза H_3),

$$P_{H_3}(A) = \frac{3}{3} = 1 \ .$$

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} \ .$$

2.11 Формула Бейеса (теорема гипотез)

Теорема гипотез также является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности. Формула предусматривает следующую постановку задачи. Имеется полная группа несовместных гипотез H_1, H_2, ..., H_n.

Вероятности этих гипотез до опыта известны и соответственно равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Произведем опыт в результате которого появилось некоторое событие А. Требуется определить, как изменятся вероятности гипотез в связи с появлением этого события. Т.е. речь идет о том, чтобы найти условную вероятность P(Hi/A) для каждой гипотезы:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}, (i = 1,2,3,...n) \ .$$

Пример 2.11.1. В ящике находятся три детали. Наудачу вынимается одна деталь. Она оказалась годной. Найти вероятность того, что все детали окажутся годными.

Решение

Событие А – появление годной детали.

Гипотеза H_1 - в ящике все детали годные.

Гипотеза H_2 - в ящике все детали бракованные.

Гипотеза H_3 - одна годная и две бракованные.

Гипотеза H_4 – две годные и одна бракованная.

До опыта все гипотезы равновероятны, поэтому:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H3) = P(H_4) = 1/4 \ .$$

Требуется переоценить гипотезу H_1 после появления годной детали. Для этого применяется формула Бейеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)},$$

где A/H_1 - появление годной детали при условии, что все детали в ящике годные:

$$P(A/H_1) = 1 \ ;$$

A/H_2 - появление годной детали при условии, что все детали бракованные:

$$P(A/H_2) = 0 \ ;$$

A/H_3 - появление годной детали при условии, что в ящике одна деталь годная и две бракованные:

$$P(A/H_3) = 1/3 \ ;$$

A/H_4 - появление годной детали при условии, что в ящике две детали годные и одна бракованная:

$$P(A/H_4) = 2/3 \ .$$

Тогда

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \ .$$

2.12 Повторение опытов

Часто приходится встречаться с задачами, в которых один и тот же опыт повторяется неоднократно и некоторое событие А может появиться или не появиться. Тогда важным будет не результат каждого опыта, а общее число появлений события А в результате серии испытаний. При этом опыты должны быть независимыми, т.е., вероятность того или иного исхода каждого из опытов не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Если производится n независимых испытаний, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие А, то вероятность Pm,n того, что событие А произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}; \quad (m = 0,1,...,n) \ ,$$

где q=1-p.

Вероятность хотя бы одного появления события А в n независимых испытаниях равна:

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n \ .$$

Вероятность того, что при n опытах событие А появится не менее m раз, выражается формулой:

$$P_n(r \geq m) = \sum_{k=m}^{n} P_{k,n} \qquad \text{или} \qquad P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,n} \ .$$

Пример 2.12.1. Вероятность размещения заказа на производство продукции на данном заводе равна 0,6. Какова вероятность получить 3 заказа из 5?

Решение

Событие А – получение заказа;

$$P(A) = p = 0{,}6 \ ;$$

$$P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \ ;$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = 10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456 \ .$$

Если n →∞ , а p→0, то применяется формула Пуассона:

$$P_n(m) = \lim_{n\to\infty}(C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \ ,$$

где $a = n \cdot p$.

<u>Пример 2.12.2.</u> По каналу связи передается ложный сигнал в одном из ста случаев. Какова вероятность появления 5 ошибок при передаче 200 независимых сигналов?

<u>Решение</u>

Событие А – появление ложного сигнала.

$$P(A) = p = 0{,}01 \ ;$$
$$a = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}01 = 2 \ ;$$
$$P_5(200) = \frac{2^5}{5!} \cdot e^{-2} = \frac{32}{120} \cdot 0{,}137 \approx 0{,}27 \ .$$

При большом числе опытов можно применять приближенные формулы Лапласа:

- локальную

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot j\,(x) \ ,$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$; $j\,(x) = \dfrac{1}{2p} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса, которая табулирована. Причем четная, т.е. φ(-x)=φ(x).

- интегральную

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) ,$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - нормированная функция Лапласа, также табулированная и нечетная, т.е. Ф(-x)=-Ф(x), Ф(x≥5)=0,5

<u>Пример 2.12.3.</u> Вероятность отклонения температуры в реакторе от номинальной равна 0,2 при каждом замере. Произведено 400 замеров. Найти вероятность того, что:

а) в 50 замерах будет отклонение от номинальной температуры;

б) отклонение температуры будет не менее, чем в 50 замерах и не более, чем в 80 замерах.

<u>Решение</u>

Событие А – появление отклонения температуры;

а)

$$P(A) = p = 0{,}2\ ;$$
$$P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0{,}8\ ;$$
$$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot j\,(x)\ ;$$
$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}75\ ;$$
$$j\,(-3{,}75) = j\,(3{,}75) = 0{,}0004\ ;$$
$$P_{400}(50) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}0004 \approx 0{,}00005\ .$$

б)

$$P(50 \le m \le 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\ ;$$
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}75; \Phi(-3{,}75) = -\Phi(3{,}75) = -0{,}4998\ ;$$
$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0; \Phi(0) = 0\ ;$$
$$P(50 \le m \le 80) \approx 0 - (-0{,}4998) = 0{,}4998\ .$$

Раздел 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1 Основные понятия и определения

Под *случайной величиной* понимают множество возможных ее значений, каждое из которых может стать исходом предстоящего опыта, результат которого нельзя предсказать.

Случайные величины делятся на два класса: *дискретные* и *непрерывные*. *Дискретной* случайной величиной называют величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Другими словами, значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называют величину, которая сплошным образом заполняет некоторый промежуток. Число принимаемых значений такой величины бесконечно.

Случайные величины обозначаются большими буквами латинского алфавита X,Y,Z,… , а их возможные значения - соответствующими малыми буквами: $x_4, x_2 \ldots x_n$ и т.д. Обозначим соответствующие вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Так как эти события образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ ,$$

т.е. сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице.

Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями случайной величины. Для полного описания случайной величины, необходимо указать с какой вероятностью она принимает каждое конкретное значение. Тем самым задают закон распределения случайной величины.

Итак, *законом распределения* случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Основными формами закона распределения являются:

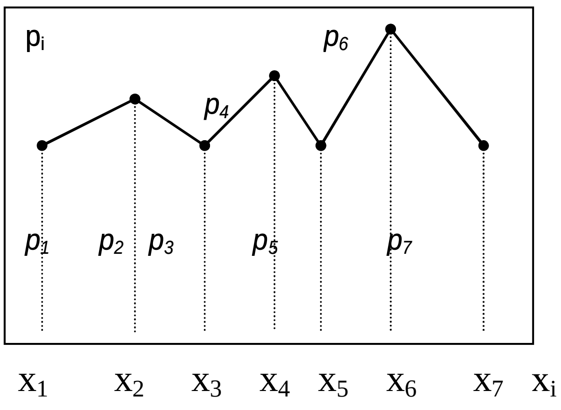
Для дискретных величин – *ряд распределения* и *функция распределения*;

Для непрерывных случайных величин – *функция распределения* и *плотность распределения*.

Таблица, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, называется *рядом распределения* дискретной случайной величины X.

Xi	x_1	x_2	…	x_n
pi	p_1	p_2	…	p_n

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения*.



Вероятность того, что X < x, где x - некоторая текущая переменная, называется *функцией распределения* случайной величины X и обозначается F(x), т.е. F(x)=P(X<x). Ее называют также *интегральным* законом распределения. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в пределах от x_1 до x_2 вычисляется по формуле:

$$P(x_1 \le x \le x_2)=F(x_2) - F(x_1) \ .$$

Введем обозначение

$$f(x) = F'(x) \ .$$

Функция $f(x)$-производная функции распределения, характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке, и называется *плотностью распределения* случайной величины или ее *дифференциальным* законом распределения.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется *кривой распределения*.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины x на некоторый интервал от α до β определяется через плотность распределения:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx \ .$$

3.2 Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками* случайной величины.

Из характеристик важнейшую роль играет *математическое ожидание* случайной величины, которое иногда называют просто *средним значением*. *Математическое ожидание* **(** $\mathbf{m_x}$ или **M(x))** вычисляется по формулам :

$$\boldsymbol{m_x}= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i \,, & \text{для дискретных СВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \,, & \text{для непрерывных СВ} \end{cases}$$

Как следует из приведенных формул, под *математическим ожиданием* понимают среднее взвешенное значение случайной величины. Здесь весом является вероятность появления этого события. Таким образом, математическое ожидание – это центр, относительно которого разбросаны остальные значения случайной величины.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать , насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. Для этого вычисляют среднее значение квадрата отклонения, которое и называют *дисперсией*.

Дисперсией (*рассеянием*) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Чаще всего дисперсию обозначают D[X]; D_x.

Итак,

$$D_x = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i, & \text{для дискретных СВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx, & \text{для непрерывных СВ} \end{cases}$$

Чем больше дисперсия случайной величины, тем больше разброс ее значений относительно математического ожидания.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Часто бывает удобно для характеристики рассеивания пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень.

Полученная величина называется *средним квадратическим* (или стандартным) отклонением случайной величины

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \quad .$$

Модой дискретной случайной величины **X** называется ее наиболее вероятное значение.

Модой непрерывной случайной величины **X** называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Моду будем обозначать символом **Mo(X)**

Медианой — **Me(x)** непрерывной случайной величины **X** называют, то ее возможное значение, которое определяется равенством:

$$P[X<M_e(X)]=P[X>M_e(x)] \quad .$$

Геометрически медиану можно представить как точку, в которой ордината f(x) делит попалам площадь, ограниченную кривой распределения.

Пример 3.1. Найти M(x) и D(x) случайной величины X, которая задана следующим законом распределения :

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Решение

Найдем математическое ожидание M(x):

$$M(x)=2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}6+5\cdot0{,}3=3{,}5 \quad .$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2)=4\cdot0{,}1+9\cdot0{,}6+25\cdot0{,}3 \quad .$$

Искомая дисперсия

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=13{,}3-(3{,}5)^2=1{,}05 \quad .$$

Пример 3.2. Найти M(x) и D(x) случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0 \\ x \text{ при } 0<x\le 1 \\ 1 \text{ при } x>1 \end{cases}$$

Решение

Найдем плотность распределения :

$$f(x)=F`(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0 \\ 1 & \text{при } 0<x\le 1 \\ 0 & \text{при } x>1 \end{cases} \quad .$$

Найдем математическое ожидание :

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = x^2/2|^1{}_0 \quad .$$

Найдем дисперсию :

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2=x^3/3-1/4=1/12.$$

Пример 3.3 Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины. $f(x)=ae^{2x-x^2}$ (a>0). Найти моду этой случайной величины.

Решение

Найдем максимум функции y=f(x). Для этого находим производные первого и второго порядков :

$$f'(x)=2a(1-x)e^{2x-x^2},\quad f''(x)=-2ae^{2x-x^2}+4a(1-x)^2e^{2x-x^2}.$$

Из уравнения f'(x)=0 получаем x=1. Так как f''(1)=-2ae<0, то при x=1 функция f(x) имеет максимум, т. е. $\mathbf{M_o(X)}=1$. Мы не определяли значения постоянной величины **a** , так как максимум функции $f(x)=ae^{2x-x^2}$ не зависит от числового значения **a.**

3.3 Биномиальное распределение

Пусть производится **n** независимых испытаний в каждом из которых событие **A** может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна **p** (следовательно, вероятность непоявления **q=1-p**). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины **X** число появлений события **A** в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины **X** . Для ее решения требуется определить возможные значения **X** и их вероятности. Очевидно событие **A** в **n** может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, . . . , либо **n** раз. Таким образом возможные значения **X** таковы: $\mathbf{x_1=0}$, $\mathbf{x_2=1}$, $\mathbf{x_3=2}$, . . . , $\mathbf{x_{n+1}=n}$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$\mathbf{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где **k=0, 1, 2, . . . ,n.**

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	$C_n^np^nq^0$

Характер биномиального распределения зависит от значения двух величин – p и n, называемых параметрами распределения.

Для нахождения числовых характеристик необходимо в общие формулы, определяющие эти характеристики, подставить значения вероятностей, получаемых с помощью формулы Бернулли и воспользоваться биномом Ньютона. В результате получаем:

$$m_x = n \cdot p \ ;$$

$$D(x) = n \cdot p \cdot q \ ;$$

$$\sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \ .$$

<u>Пример 3.3.1.</u> Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины **X** – числа выпадений «герба».

<u>Решение</u>

Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты **p=1/2**, следовательно, вероятность непоявления «герба» **q=1 – 1/2**.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения **X** таковы : $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли :

$$P_2(2)=C_2^2p^2=(1/2)^2=0.25 \ ,$$

$$P_2(1)=C_2^1pq=2\cdot(1/2)\cdot(1/2)=0.5 \ ,$$

$$P_2(0)=C_2^0q^2=(1/2)^2=0.25 \ .$$

Напишем искомый закон распределения :

x_i	**0**	**1**	**2**
p_i	**0,25**	**0,50**	**0,25**

К о н т р о л ь : **0,25 + 0,5 + 0,25 = 1.**

3.4 Распределение Пуассона

Пусть производится **n** независимых испытаний в каждом из которых вероятность появления события **A** равна **p**. Для определения вероятности **k** появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же **n** велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p \le 0,1$). В этих случаях (**n** велико, **p** мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$$

где **λ = np –** положительное число, являющееся единственным параметром этого распределения.

Ряд распределения для закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$\frac{l^0}{0!}\cdot e^{-l}$	$\frac{l^1}{1!}\cdot e^{-l}$	$\frac{l^2}{2!}\cdot e^{-l}$	…	$\frac{l^n}{n!}\cdot e^{-l}$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (**n** велико **)** и редких (**p** мало) событий.

Только для распределения Пуассона характерно, что его числовые характеристики $\boldsymbol{m_x}$ и ***D(x)*** совпадают со значением параметра:

$$\boldsymbol{m_x = D(x) = \lambda} \; .$$

Пример 3.4.1. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение

По условию, n=5000, p=0,0002, k=3 . Тогда

λ = np = 5000·0,0002 = 1 .

P_{5000}(3) = λke-λ/k! = e-1/3! = 1/6e=0,06.

3.5 Показательное распределение

Показательным (*экспоненциальным*) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины **X**, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0, \end{cases}$$

где **λ**—постоянная положительная величина.

Мы видим, что показательное распределение определяется одним параметром **λ.** Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров. Обычно параметры неизвестны и приходится находить их оценки (приближенные значения); разумеется, проще оценить один параметр.

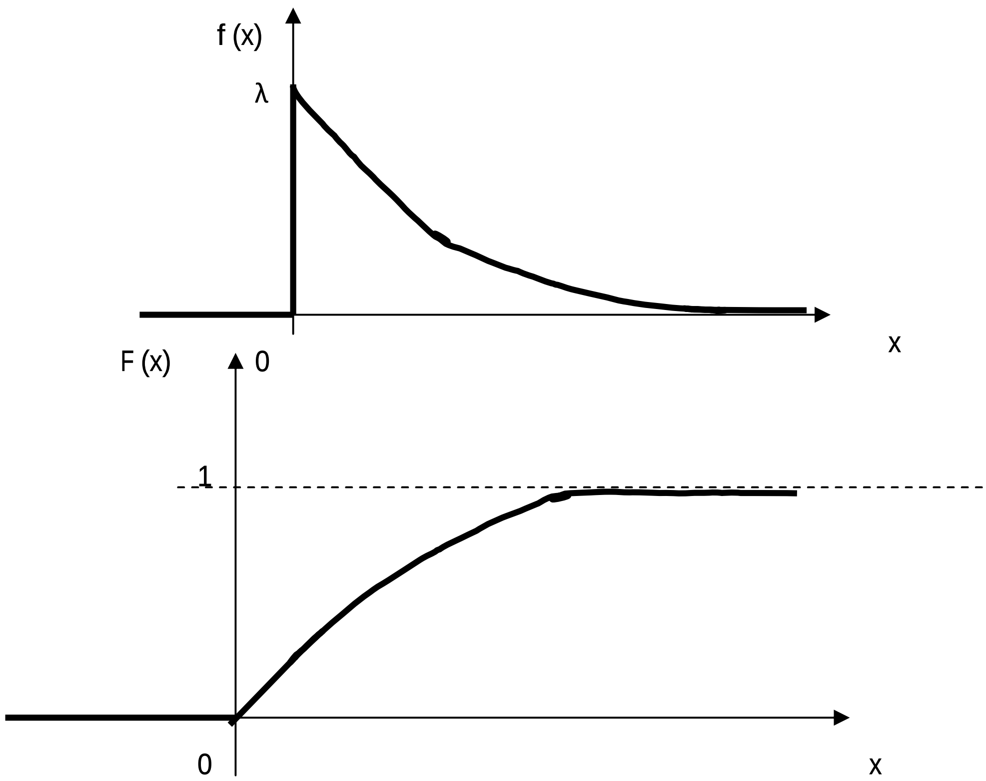
Найдем функцию распределения показательного закона :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции распределения показательного распределения выглядят так:



Вероятность попадания случайной величины X на интервал $(a;b)$ равна

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad .$$

Основные числовые характеристики показательного распределения определяются по формулам:

$$\boldsymbol{m_x} = \frac{1}{l}\ ;$$

$$\boldsymbol{D(x)} = \frac{1}{l^2};$$

$$\boldsymbol{\sigma_x} = \frac{1}{l}\ .$$

Таким образом, $\boldsymbol{m_x}$ и $\boldsymbol{\sigma_x}$ экспоненциально распределенной случайной величины совпадают.

Пример 3.5.1. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=8,

Решение

Очевидно, искомая плотность распределения $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\geq0$; $f(x)=0$ при $x<0$.

Искомая функция распределения $F(x)=1=e^{-8x}$ при $x\geq0$; $F(x)=0$ при $x<0$.

Найдем вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины **X**, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$F(x)= 1 – e^{=\lambda x}$ $(x \geq 0)$.

Используем формулу

$$P (a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{3.5.1}$$

Учитывая, что $F (a) = 1 – e^{-\lambda a}$, $F (b) = 1 – e^{-\lambda b}$, получим

$P (a < X < b) =e^{-\lambda a} – e^{-\lambda b}$.

Пример 3.5.2. Непрерывная случайная величина **X** распределена по показательному закону

$F(x)=2e^{-2x}$ при $x \geq 0$; $f(x)=0$ при $x<0$.

Найти вероятность того, что в результате испытания **X** попадает в интервал (0,3; 1)

Решение

По условию, λ=2. Воспользуемся формулой (3.5.1) :

$P (0,3 < X < 1) = e^{-(2\cdot0.3)} – e^{-(2\cdot1)} = e^{-0.6} – e^{-2} =0,54881 – 0,13534 = 0,41347.$

Пусть непрерывная случайная величина **X** распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$M(X) = 1 / \lambda \ . \tag{3.5.2}$$

Таким образом, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ.

Найдем дисперсию

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - 1/\lambda^2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\, dx = 2/\lambda^2.$$

Следовательно, $D(X) = 1/\lambda^2$.

Найдем среднее квадратическое отклонение, для чего извлечем квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = 1/\lambda. \qquad (5.3.3)$$

Сравнивая формулы (5.3.2) и (5.3.3), заключаем, что

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda,$$

т. е. математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

Пример 3.5.3. Непрерывная случайная величина **X** распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0; \quad f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию.

Решение

По условию, $\lambda = 5$. Следовательно,

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0{,}2;$$

$$D(X) = 1/\lambda^2 = 1/5^2 = 0{,}04.$$

3.6 Равномерное распределение

Распределение вероятностей называют *равномерным*,если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Приведем пример равномерно распределенной случайной величины.

Пример 3.6.1. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину **X**, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким образом, **X** имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения f(x), считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a ; b), на котором функция f (x) сохраняет постоянные значения.

По условию, **X** не принимает значений вне интервала (a ; b), поэтому f (x) = 0 при x < a и x > b.

Найдем постоянную **C**. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a ; b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \quad \text{или} \quad \int_a^b Cdx = 1.$$

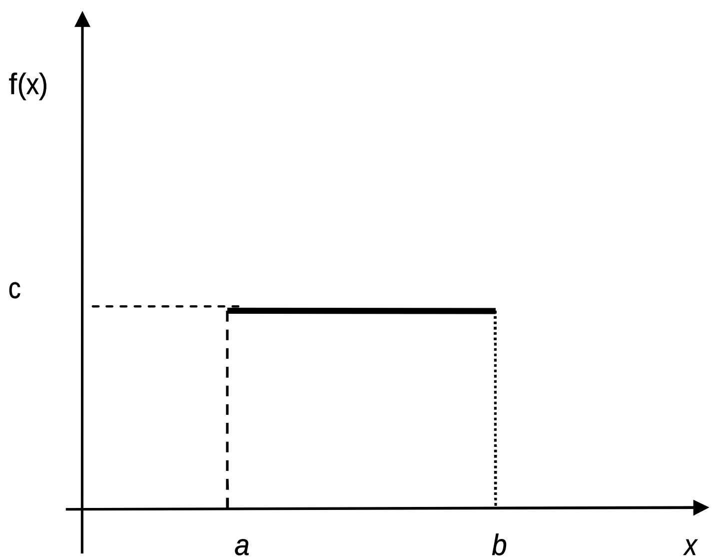
Отсюда

$$C = 1/\int_a^b dx = 1/(b-a).$$

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения



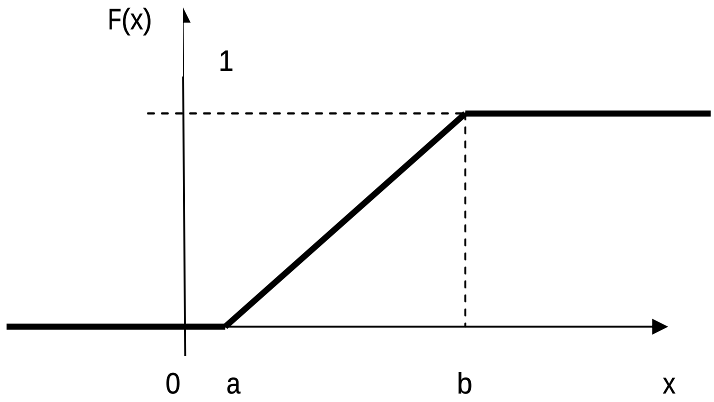
Учитывая связь функции распределения F(x) с плотностью распределения f(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

и интегрируя на отдельных интервалах, получим выражение для F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x < a; \\ \dfrac{x-a}{x-b}, & \textit{если} \quad a \le x < b; \\ 1, & \textit{если} \quad x > b. \end{cases}$$

График функции распределения в этом случае выглядит так:



Вероятность попадания случайной величины **X** на интервал (α; β) , принадлежащий интервалу (a; b), равна его длине:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Если (α; β) не лежит полностью на (a; b), то в приведенной формуле принимают α=a при α<a и β=b при β>b.

3.7 Нормальное распределение (закон Гаусса)

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Мы видим, что нормальное распределение определяется двумя параметрами : **a** и **σ.** Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Вероятностный смысл этих параметров таков: **a** есть математическое ожидание $\boldsymbol{m_x}$, **σ** —среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_x$ нормального распределения.

Кривая нормального распределения имеет симметричный холмообразный вид. Максимальная ордината кривой имеет место в точке x = m и равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

По мере удаления от точки x=m плотность распределения падает и при x→±∞ кривая асимптотически приближается к кривой абсцисс.

Функция распределения нормальной случайной величины определяется как

$$F(x) = \overline{\Phi}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\overline{\Phi}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ - нормированная функция Лапласа. Для нее составлены таблицы, при этом учтено свойство нечетности функции.

Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины в заданный интервал (α; β) определяется по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \qquad (3.7.1)$$

Пример 3.7.1 Случайная величина **X** распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что **X** примет значение, принадлежащее интервалу (10 , 50).

Решение

Воспользуемся формулой (3.7.1). По условию, α=10, β=50, a=30, σ=10, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) \ .$$

По таблице находим Ф(2)=0,4772. Отсюда, искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1972.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1978.
4. Гурский Е.М. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971.
5. Дудин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. –М.: Физматгиз, 1965.
6. Карасев А.И. и др. Курс высшей математики для экономических вузов.-М.: Высшая школа.- 1982.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2- М.: Высш. шк., 1986.

Оглавление

Учебное издание

Бартенев Георгий Михайлович

Дук Александр Николаевич

Сазонова Марина Сергеевна

Ткаченко Елена Георгиевна

Толстой Виктор Владимирович

Целуйко Наталья Васильевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть III

Раздел «Теория вероятностей и математическая статистика»

Конспект лекций

Тем. план 2009, поз. 117

Подписано к печати 07.12.09. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 2,47. Усл. печ. л. 2,44. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины

49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ