

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**БЕРДНИК МИХАЙЛО ГЕННАДІЙОВИЧ**

УДК 004.942:517.958:519.63

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ  
ЗАДАЧ ТЕПЛООБМІНУ ТІЛ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Дніпро – 2020

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» Міністерства освіти і науки України

**Науковий консультант**

доктор технічних наук, професор  
**Гнатушенко Володимир Володимирович**,  
Національний технічний університет  
«Дніпровська політехніка» Міністерства освіти і  
науки України,  
завідувач кафедри інформаційних технологій та  
комп'ютерної інженерії

**Офіційні опоненти:**

доктор технічних наук, професор,  
член-кореспондент НАН України  
**Мохор Володимир Володимирович**,  
Інститут проблем моделювання в енергетиці  
ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук  
України, директор

доктор технічних наук, професор  
**Єрємін Олександр Олегович**,  
Національна металургійна академія України  
Міністерства освіти і науки України,  
завідувач кафедри екології, теплотехніки та  
охорони праці

доктор технічних наук, професор  
**Атаманюк Ігор Петрович**,  
Миколаївський національний аграрний  
університет Міністерства освіти і науки України,  
завідувач кафедри вищої та прикладної  
математики

Захист відбудеться «\_3\_» березня\_\_\_ 2021 р. о 13-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.084.01 у Національній металургійній академії України МОН України за адресою: 49600, м. Дніпро, проспект Гагаріна, 4.

З дисертацією можна ознайомитись на сайті <http://nmetau.edu.ua> та у бібліотеці Національної металургійної академії України МОН України за адресою: 49600, м. Дніпро, проспект Гагаріна, 4.

Автореферат розісланий «\_29\_» \_\_січня\_\_\_\_\_ 2021 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

\_\_\_\_\_Т.В. Селівьорстова

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Проблема дослідження температурних полів у тілах обертання постійно привертає увагу дослідників, адже багато елементів машин і механізмів (супутники, сортопрокатні валки, ротори енергетичних агрегатів, дискові гальма та ін.) мають їх форму і працюють в умовах інтенсивного нагріву.

У більшості сучасних турбомашин диски працюють в умовах підвищеного навантаження, що призводить до виникнення пластичних деформацій, де необхідно враховувати вплив високих температур і виникнення температурних напружень. Великий вплив на величину температурних напружень має закон зміни температури по радіусу диска. Відомо, що заміна лінійного закону зміни температури по радіусу квадратичним законом може призвести до істотного зростання окружних напружень. Тому достатня точність визначення температурного поля в розрахунках на міцність має принципове значення. Крім того, при великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним.

Ось чому до числа проблем, що представляють великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурного поля в тілах, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Однак нині існує проблема, пов'язана з невизначеністю підходів, у першу чергу, внаслідок припущень, прийнятих у виборі диференціального оператора при моделюванні високоінтенсивних процесів теплообміну. Результати рішень рівнянь теплопровідності в ряді випадків не відображають реального розподілу температур при високоінтенсивному нагріванні. Таким чином, актуальність теми дослідження обумовлюється необхідністю розробки коректних математичних моделей теплопровідності при нагріві з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Дослідження високоінтенсивних процесів нагріву тіл, що призводить до необхідності враховувати релаксацію теплового потоку при отриманні відповідних математичних моделей для розрахунку температурного поля, визначає практичну значимість рішення задач для гіперболічного рівняння теплопровідності. Систематичні публікації про гіперболічні моделі переносу можна віднести до кінця 60-х років минулого століття. Використання гіперболічної форми рівняння теплопровідності, що описує поширення збурень із кінцевою швидкістю, відображено в роботах Ю.І. Широкого, А.І. Губіна, Ю.А. Малої, О.А. Сінкевича, О.М. Семенова, В.Б. Веселовського, О.Є. Кузнецової, В.А. Кудінова, І.В. Кудінова, Н.І. Нікітенко, Wafo Soh, M. Pakdemirli, A.Z. Şahin, J.A. Lopez Molina, M. Trujillo та ін. На даний час побудові математичних моделей теплопровідності на основі гіперболічного рівняння приділяється велика увага. Досліджень за тематикою розв'язання задач теплопровідності для тіл обертання з урахуванням релаксації теплового потоку нами не виявлено.

У результаті аналізу літературних джерел виявлено, що немає визначеності у виборі диференціального оператора для моделювання високоінтенсивних процесів нагріву тіл і немає адекватних моделей в явному вигляді, що описують

нестационарну теплопровідність нагріву тіл обертання. Це дає підстави для висновку про *актуальність вирішення суттєвої наукової проблеми математичного моделювання процесів нагріву тіл, що обертаються, з урахуванням релаксації теплового потоку.*

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика роботи відповідає вимогам, встановленим Законом України «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки» (від 11 липня 2001 року, № 2623-III і 16 січня 2016 року, №848-VIII), у тому числі розділам «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави» і «Енергетика та енергоефективність», а також Закону України «Про пріоритетні напрями інноваційної діяльності в Україні» (від 08.09.2011 р., № 3715-VI і 05.12.2012 р., № 5460-VI), у тому числі розділу «Стратегічний пріоритетний напрям на 2011–2021 рр.: освоєння нових технологій транспортування енергії, впровадження енергоефективних, ресурсозберігаючих технологій, освоєння альтернативних джерел енергії». Тематика дисертаційного дослідження відповідає також пріоритетному тематичному напрямку фундаментальних досліджень і науково-технічних розробок на період до 2020 року «Технології та засоби розробки програмних продуктів і систем» постанови Кабінету Міністрів України № 556 від 23.08.2016 р.

Робота відповідає тематиці досліджень Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» з математичного моделювання складних процесів і систем, зокрема, в рамках НДР Міністерства освіти і науки України «Синтез, оптимізація та параметризація інноваційних технологій освоєння ресурсів газовугільних родовищ» (№ держреєстрації 0119U000248). Дослідження за темою дисертації проводились також згідно з планами наукових досліджень кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», зокрема, «Розробка та впровадження сучасних засобів дистанційного навчання та діагностики знань із дисциплін напряму підготовки комп'ютерні науки» (Е-310).

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є вирішення важливої науково-технічної проблеми моделювання явища теплопровідності в тілах, що обертаються, з урахуванням релаксації теплового потоку, що дає змогу підвищити точність розрахунку температурних полів у цих тілах. Основою зазначеного напряму роботи є розробка та обґрунтування адекватних узагальнених тривимірних математичних моделей температурних розподілів у тілах, що обертаються, у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності та розв'язання отриманих крайових задач за допомогою нових інтегральних перетворень.

**Для досягнення зазначеної мети було поставлено такі завдання:**

– отримання диференційного узагальненого рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;

– використовуючи диференційне узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища отримати диференційне узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, що обертається, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат;

– побудувати нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області  $D \subset R^2$ , обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами. За допомогою методів скінченних елементів і Гальоркіна для симплекс-елементів першого і другого порядку розробити метод знаходження ядра побудованого нового кінцевого інтегрального перетворення;

– побудувати нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$ . За допомогою методів скінченних елементів і Гальоркіна для симплекс-елементів першого і другого порядку розробити метод знаходження ядра побудованого нового кінцевого інтегрального перетворення;

– побудувати математичні моделі і методи розрахунку полів температури в циліндрах і двоскладових циліндрах, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, кінцевої довжини у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана;

– побудувати математичні моделі і методи розрахунку полів температури в ізотропному і порожньому ізотропному тілі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана, а також зі змішаними умовами;

– побудувати математичну модель і метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі мат. фізики для рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле;

– побудувати математичні моделі і методи розрахунку полів температури в параболоїді обертання, півсферичному тілі, тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, прямому круговому конусі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана.

**Об'єктом дослідження** є теплові процеси, які відбуваються у тілах, що обертаються, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

**Предметом дослідження** є математичні моделі та методи аналізу теплових процесів, які відбуваються у тілах, що обертаються, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі пошук чисельно-аналітичних розв'язків поставлених задач проводиться із застосуванням розроблених нових кінцевих інтегральних перетворень, ядра яких знаходяться за допомогою методів скінченних елементів і Гальоркіна. Були також використані інтегральні перетворення Фур'є, Ханкеля і Лапласа, методи обробки експериментальних даних. Достовірність отриманих теоретичних результатів підтверджено обчислювальними експериментами.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в обґрунтуванні та розв'язанні проблеми математичного моделювання температурних полів у тілах, що обертаються, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Це дає змогу підвищити точність розрахунку температурних полів в тілах обертання.

**Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, є такі:**

***Вперше:***

– отримано диференційне узагальнене рівняння переносу енергії в криволінійній системі координат для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що дозволяє одержувати узагальнені рівняння переносу енергії, які використовуються при моделюванні процесів теплообміну в різних системах координат;

– використовуючи диференційне узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, отримано диференційне узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні в циліндричній системі координат, що використовується при побудові математичних моделей для розрахунку температурних полів в тілах обертання з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;

– побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області  $D \subset R^2$ , обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами, і нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$ . За допомогою методів скінченних елементів і Гальоркіна для симплекс-елементів першого і другого порядку розроблено метод знаходження ядер побудованих нових кінцевих інтегральних перетворень. Застосування побудованих нових кінцевих інтегральних перетворень для розв'язання крайових задач математичної фізики, які виникають при математичному моделюванні температурних полів у тілах обертання, має переваги перед числовими методами: незалежність обсягу обчислень від значень просторових і часових координат (як наслідок – відсутність накопичення розрахункових похибок), не викликає додаткових труднощів розрахунку середніх і локальних значень, балансних співвідношень, присутніх у будь-якій моделі, можливість використання часткових рішень, отриманих раніше, можливість використання уніфікованого набору задач для моделювання класу процесів у відповідному обладнанні, можливість аналізу і спрощення рішень для характерних і

граничних значень параметрів процесу, наочність проміжних і кінцевих розрахункових результатів;

– побудовані математичні моделі і методи розрахунку полів температури в циліндрах і двоскладових циліндрах, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, кінцевої довжини у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана, що дає змогу при моделюванні температурних полів у циліндрах, які є елементами багатьох технічних систем (у супутниках, прокатних валках, турбінах та ін.), підвищити точність розрахунку температурних полів;

– побудовано математичні моделі і методи розрахунку полів температури в ізотропному і порожньому ізотропному тілі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле, Неймана, а також зі змішаними умовами, що дає змогу при моделюванні температурних полів у дисках складної форми, які є найважливішим елементом багатьох машин, підвищити точність розрахунку температурних полів;

– побудовано математичну модель і метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле, що дозволяє отримати більш ефективні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварюванні з врахуванням відповідних термомеханічних процесів;

– побудовано математичні моделі і методи розрахунку полів температури в параболоїді обертання, півсферичному тілі, тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, прямому круговому конусі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле, що дає змогу при моделюванні температурних полів у цих тілах підвищити точність розрахунку температурних полів.

***Удосконалено:***

– методи розрахунку нестационарних полів температури в циліндрах і двоскладових циліндрах кінцевої довжини, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;

– методи розрахунку нестационарних температурних полів у ізотропному і порожньому ізотропному тілі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;

– методи розрахунку нестационарних полів температури в параболоїді обертання, півсферичному тілі, тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, прямому круговому конусі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;

– метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні.

***Одержали подальший розвиток:***

- теорія математичного моделювання процесів теплообміну в ізотропному і порожньому ізотропному тілі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла;
- теорія кінцевих інтегральних перетворень для рівняння Лапласа;
- застосування обчислювальних методів скінченних елементів і Гальоркіна для симплекс-елементів першого і другого порядку при розв’язанні спектральних задач, для знаходження ядер розроблених нових інтегральних перетворень;
- засоби комп’ютерного моделювання на основі розроблених чисельно-аналітичних методів розрахунку полів температури в тілах, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

**Достовірність отриманих результатів** забезпечується коректністю та строгістю математичних викладок, використанням загальноновизнаних математичних моделей фізичних процесів і апробованих методів обчислювальної математики, підтверджується доведенням тверджень, граничними переходами до відомих окремих випадків, одержаних в рамках інших теоретичних підходів, апробацією математичних моделей на тестових прикладах, зіставленням отриманих результатів з відомими та впровадженнями.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає в розробці:

- чисельно-аналітичних методів розрахунку полів температури в циліндрах і в двоскладових циліндрах, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, розглядаючи циліндр як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку, дозволяють знаходити температурні поля в прокатних валках із більшою точністю;
- чисельно-аналітичних методів розрахунку полів температури в тілах, що обертаються, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, дозволяють знаходити з більшою точністю температурні поля в дисках складної форми, які обертаються, і є найважливішим елементом багатьох машин, тому достатня точність визначення температурного поля в розрахунках на міцність має принципове значення;
- чисельно-аналітичного методу розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні, що дозволяє отримати більш ефективні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварюванні;
- чисельно-аналітичного методу розрахунку полів температури в параболоїді, що обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що дозволяє підвищити точність визначення температурних полів в заготовках при процесі індукційного нагріву;
- чисельно-аналітичного методу розрахунку полів температури при нагріванні в тілі півсферичної форми, що обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, яке наближено моделює роботу алмазного долота, що дає змогу більш точно прогнозувати температуру алмазного бурового долота з урахуванням кутової швидкості буріння та кінцевої швидкості поширення тепла;



– чисельно-аналітичного методу розрахунку полів температури при нагріванні в однопорожнинному гіперболоїді, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, який моделює теплообмін у градирнях подібної форми, виконані з металопрокату або збірного залізобетону, армованого в напрямку меридіанів і паралелей, потребує аналізу їх термоміцності, термовипучування, які широко використовуються в атомній енергетиці, хімічній і металургійній промисловості.

Побудовані в роботі математичні моделі і методи розрахунку полів температури в циліндрах і двоскладових циліндрах, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, кінцевої довжини були використані ТОВ «ФАЙЄРФЛАЙ АЕРОСПЕЙС Україна» в розрахунках теплообміну при проектуванні елементів ракети-носія, про що свідчить акт щодо впровадження матеріалів дисертації.

Побудовані в роботі математична модель і метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні були використані ТОВ «Зірковий 1» для розрахунку температурних полів зварних виробів тіл обертання, що дозволило отримати більш ефективні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварюванні з урахуванням термомеханічних процесів, про що свідчить акт щодо впровадження матеріалів дисертації.

Побудовані в роботі математичні моделі і методи розрахунку полів температури в ізотропному тілі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, були використані ТОВ «АРМА ГРУПП» для визначення показників міцності теплонапружених футерувальних плит барабана барабанно-кульових млинів із урахуванням розподілу температур в умовах експлуатації. Отримані розрахунки показників міцності дозволили вибрати оптимальні конструктивні геометричні розміри футерувальних плит барабана, що забезпечує більш повільний знос плит, зниження питомої витрати металу і електроенергії, підвищення продуктивності млина, про що свідчить акт щодо впровадження матеріалів дисертації.

Результати дисертаційної роботи також впроваджено у навчальний процес Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» в курсі «Моделювання систем», про що свідчить акт впровадження матеріалів дисертації.

**Особистий внесок здобувача.** Дана робота є узагальненням результатів теоретичних та експериментальних досліджень, виконаних автором самостійно і опублікованих у особисто підготовлених працях [1 – 15, 17 – 23, 25 – 35, 40 – 44, 50 – 52, 55-58]. Особистий внесок здобувача в роботах, опублікованих у співавторстві, полягає у розробці всіх теоретичних і прикладних питань, що складають наукову новизну досліджень. Особистий внесок у роботах, опублікованих у співавторстві, полягає у наступному: [16, 39, 45, 59] – побудовані математичні моделі і методи розрахунку полів температури у циліндрах; [24] – розробка математичної моделі і методу розрахунку полів температури в параболоїді обертання; [36, 38, 47] – розробка алгоритмів обчислення розріджених матриць і систем алгебраїчних рівнянь; [46, 48] – розробка програмного забезпечення і алгоритмів застосування методів кінцевих елементів та триангуляції об'єктів; [37, 49, 53, 54] – розробка

алгоритмів визначення власних значень, власних функцій диференціальних операторів і загальної методики чисельного розв'язання задачі.

**Апробація результатів дисертації.** Основні ідеї, принципи, положення і результати дисертаційних досліджень пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах: I міжнародній конференції «НАУКА І ОСВІТА '98» (Дніпропетровськ-Одеса-Кривий Ріг-Харків-Київ-Дніпродзержинськ, 23–30 квітня 1998 р.), Міжнародній науково-практичній конференції «Динаміка наукових досліджень» (Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ-Черкаси, 28 жовтня–4 листопада 2002 р.), III міжнародній науково-практичній конференції «Динаміка наукових досліджень '2004» (Дніпропетровськ, 21–30 червня 2004 р.), Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ, 2005 р., 2006 р., 2009 р., 2011 р., 2012 р., 2014 р., 2015 р.; Дніпро 2017 р., 2018 р., 2019 р.), X відкритій науковій конференції Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (PSC-IMFS-10) (Львів, 17–18 травня 2012 р.), IX міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті» (Дніпропетровськ, 16–17 грудня 2015 р.), Міжнародній науково-технічній конференції «Штучний інтелект та інтелектуальні системи» (Бердянськ, 26–30 вересня 2015 р.), Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI'2016)» (Залізний Порт, 24–28 травня 2016 р.), III міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2016)» (Черкаси, 2016 р.), VIII міжнародній школі-семінарі «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 2016 р.), Міжнародній науковій інтернет-конференції «Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення» (Тернопіль, 2017 р., 2018 р.), Міжнародній науково-технічній конференції «Штучний інтелект та інтелектуальні системи» (Київ, 2016 р.-2018 р.), XIX міжнародній конференції з математичного моделювання, присвяченій 250-річчю з дня народження Жана Батиста Жозефа Фур'є (сміт Лазурне, Херсонська область, 2018 р.), XIIIth International Scientific and Technical Conference «Computer science and information technologies CSIT 2018» (Lviv, September, 2018), XX міжнародній конференції з математичного моделювання (МКММ-2019) (Херсон, 16–20 вересня 2019 р.).

**Публікації.** За темою дисертаційної роботи опубліковано 59 наукових праць, у тому числі 26 одноосібних наукових статей, серед яких 25 статей у наукових фахових виданнях, рекомендованих МОН України, 1 у закордонному профільному журналі, 20 статей індексується у міжнародних науково-метричних базах, зокрема 1 включена до бази Web of Science, 5 статей – до бази SCOPUS, 27 робіт опубліковано у збірниках наукових праць та матеріалах конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і трьох додатків. Загальний обсяг роботи становить 354 сторінки, із них 304 сторінки основного тексту, в тому числі 59 рисунків і список використаних джерел із 160 найменувань на 18 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** на основі аналізу сучасного стану моделювання високоінтенсивних процесів нагріву тіл обертання обґрунтовано актуальність розв'язуваної наукової проблеми, сформульовано мету роботи та завдання дослідження. Розкрито наукову новизну й практичну цінність отриманих результатів, реалізацію та впровадження результатів роботи. Наведено дані про особистий внесок дисертанта, апробацію роботи та публікації.

У **першому розділі** виконано аналітичний огляд сучасного стану моделювання високоінтенсивних процесів нагріву тіл. На підставі аналізу розглянутих матеріалів основним напрямом подальшого дослідження є розробка нових узагальнених тривимірних математичних моделей температурних розподілів у рухомому середовищі у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності та розв'язання отриманих крайових задач, розв'язки яких використовуються під час керування температурними полями.

У **другому розділі** розглянуто основні властивості перетворення Лапласа, а також формули оберненого перетворення Лапласа і основна теорема застосування кінцевих інтегральних перетворень для відрізка, основні означення і формули застосування кінцевих інтегральних перетворень Фур'є і Ханкеля, а також формули для обернених перетворень Фур'є і Ханкеля. Наведено основні означення і формули застосування кінцевих інтегральних перетворень для кусково-однорідних середовищ, формули обернених перетворень кінцевих інтегральних перетворень для кусково-однорідних середовищ, формули для поліпшення збіжності рядів, одержуваних при застосуванні кінцевих інтегральних перетворень Фур'є і Ханкеля і формули для поліпшення збіжності рядів, одержуваних при застосуванні кінцевих інтегральних перетворень для кусково-однорідних середовищ. Увесь зазначений математичний апарат використовується при подальшому математичному моделюванні полів температури в циліндрах і в двоскладових циліндрах, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

**Третій розділ** дисертаційної роботи присвячений застосуванню методів скінченних елементів і Гальоркіна для побудови нових кінцевих інтегральних перетворень, що використовуються при математичному моделюванні температурних полів в тілах обертання з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

У **підрозділі 3.1** побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області. Нехай  $D \subset R^2$  – обмежена область із замкненим кусково-гладким контуром  $\Gamma$ , а  $\bar{n}$  – зовнішня одинична нормаль до  $\Gamma$ .

Розглянемо інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в області  $D$ :

$$\bar{f}(\mu_k) = \iint_D \phi(x, y, \mu_k) \cdot f(x, y) d\sigma, \quad (1)$$

де  $\phi(x, y, \mu_k)$ ,  $\mu_k$  – власні функції (ВФ) і власні значення (ВЗ).

Класична проблема ВЗ і ВФ формулюється як задача про визначення ВЗ  $\mu_k$  і ВФ  $\phi(x, y, \mu_k)$ , які тотожно нерівні нулю в області  $D$  та задовольняють рівнянню

$$L[\phi] + \mu_k \cdot \phi = 0 \quad (2)$$

і граничній умові:

$$\left( \alpha \cdot \phi + \beta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

де  $L[\phi] = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа;  $\alpha, \beta \in C(\Gamma)$ ;  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ;

$\alpha + \beta > 0$ ;  $\phi(x, y, \mu_n) \in C^2(D) = \{u(x, y) \in C(D) : \partial_{\alpha} u(x, y) \in C(D), \forall \alpha, |\alpha| \leq 2\}$ ;

$$\partial_{\alpha} u(x, y) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x, y)}{\partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2}};$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$  – мультиіндекс, компоненти якого є цілими невід'ємними числами.

Для інтегрального перетворення (1) в роботі доведено теорему.

**Теорема 3.1.** Після застосування до оператора Лапласа  $L[u]$  інтегрального перетворення (1) одержуємо вираз для зображення оператора Лапласа:

$$\bar{L}[u] = -\mu_k \cdot \bar{u} + \oint_{\Gamma} \left( \phi \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) dl, \quad (4)$$

де  $\Gamma$  – додатно орієнтований контур.

Якщо область  $D$  обмежена декількома замкненими кусково-гладкими контурами (рис. 1), то інтеграл у (4) перетворюється на суму інтегралів за відповідними контурами. При цьому всі нормалі повинні бути зовнішніми по відношенню до області  $D$ .

Формула оберненого перетворення для (1) має вигляд:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(x, y, \mu_k)}{\|\phi(x, y, \mu_k)\|^2} \bar{u}(\mu_k). \quad (5)$$

**У підрозділі 3.2** розроблений метод знаходження ВЗ і ВФ оператора Лапласа для двовимірної обмеженої області методом скінчених елементів (МСЕ) в формі Гальоркіна за допомогою симплекс-елементів першого порядку. Для цього робиться розбиття області на симплекс-елементи (рис. 2). Тоді функція  $\phi(x, y)$  у середині симплекс-елемента виражається через функції форми  $N_1, N_2, N_3$  із відомими значеннями  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  у вершинах трикутника:

$$\phi_e(x, y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 = [N_e]^T \{\phi_e\}, \quad (6)$$

де  $[N_e] = [N_1, N_2, N_3]^T$ ;  $\{\phi_e\} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T$ , а нижній індекс (e) означає довільний симплекс-елемент.

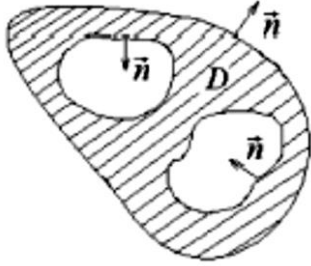


Рисунок 1 – Область, обмежена декількома замкненими кусково-гладкими контурами

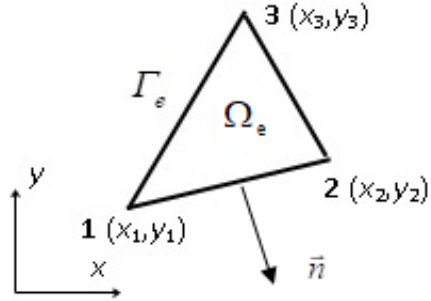


Рисунок 2 – Трикутний симплекс-елемент першого порядку

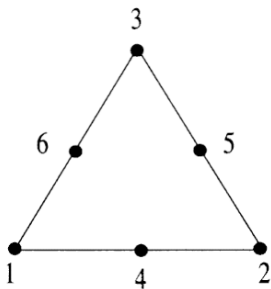


Рисунок 3 – Трикутний елемент другого порядку

Після застосування до задачі (2)–(3) методу МСЕ у формі Гальоркіна для симплекс-елементів першого порядку знаходження ВЗ  $\mu_k$  і ВФ  $\phi(x, y, \mu_k)$ , які є ядрами інтегрального перетворення (1), зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

У підрозділі 3.3 розроблений метод знаходження ВЗ і ВФ оператора Лапласа для двовимірної обмеженої області методом МСЕ в формі Гальоркіна за допомогою трикутних елементів другого порядку. Для цього робиться розбиття області на трикутні елементи другого порядку (рис. 3). Тоді функція  $\phi(x, y)$  у середині симплекс-елемента виражається через шість функцій форми  $N_i$  з відомими значеннями  $\phi_i$  у вершинах трикутника

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i \phi_i = [N]^T \{\phi\}, \quad (7)$$

де  $[N] = [N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6]^T$ ;  $\{\phi\} = (\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6)^T$ ;  $i = 1, \dots, 6$ .

Координати точок 1–6 відповідно дорівнюють  $(x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)$ .

Після застосування до задачі (2)–(3) методу МСЕ у формі Гальоркіна для трикутних елементів другого порядку знаходження ВЗ  $\mu_k$  і ВФ  $\phi(x, y, \mu_k)$ , які є ядрами інтегрального перетворення (1), в роботі зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

У підрозділі 3.4 побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа у циліндричній системі координат.

При знаходженні температурних полів в тілах обертання виникає необхідність розв'язання крайових задач у циліндричній системі координат в області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$ , які містять оператор

$$M[\theta] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (8)$$

Для розв'язання крайових задач, які містять оператор  $M[\theta]$ , застосовуємо інтегральне перетворення

$$\tilde{f}(\mu_{n,k}) = \iint_{\Xi} x \phi(x, y, \mu_{n,k}) \cdot \theta(x, y) d\sigma, \quad (9)$$

де  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$ ,  $\mu_{n,k}$  – ВФ і ВЗ відповідно.

ВФ і ВЗ тотожно нерівні нулю в області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$  та задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \mu_{n,k} \cdot \phi = 0 \quad (10)$$

і допоміжним умовам

$$\left( \alpha_1 \cdot \phi + \beta_1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{x=\zeta_1(z)} = 0, \quad \left( \alpha_2 \cdot \phi + \beta_2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{x=\zeta_2(z)} = 0, \quad (11)$$

$$\left( \alpha_3 \cdot \phi + \beta_3 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left( \alpha_4 \cdot \phi + \beta_4 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{y=h} = 0, \quad (12)$$

де  $\phi(x, y, \mu_{n,k}) \in C^2(\Xi) = \{u(x, y) \in C(\Xi) : \partial_{\alpha} u(x, y) \in C(\Xi), \forall \alpha, |\alpha| \leq 2\}$ .

Для інтегрального перетворення (9) в роботі доведено наступну теорему.

**Теорема 3.2.** Після застосування до оператора  $M[\theta]$  інтегрального перетворення (9) одержуємо вираз:

$$\tilde{M}[\theta] = \int_0^h \left\langle \left\{ x \left[ \phi(x, y, \mu_{n,k}) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(x, y, \mu_{n,k})}{\partial x} \theta(x, y) \right] \right\} \Big|_{\zeta_1(y)}^{\zeta_2(y)} \right\rangle dz + \oint_L x \left( \phi \frac{\partial \theta}{\partial y} - \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dl - \mu_{n,k} \cdot \tilde{\theta},$$

де  $L$  – додатно орієнтований контур.

Формула оберненого перетворення для (10) має вигляд

$$\theta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(x, y, \mu_{n,k})}{\|\phi(x, y, \mu_{n,k})\|^2} \tilde{\theta}(\mu_{n,k}). \quad (13)$$

У підрозділі 3.5 розроблено метод знаходження ВЗ і ВФ оператора Лапласа у циліндричній системі координат для двовимірної обмеженої області методом МСЕ у формі Гальоркіна за допомогою симплекс-елементів першого порядку. Після застосування до задачі (10)–(12) методу МСЕ у формі Гальоркіна для симплекс-елементів першого порядку знаходження ВЗ  $\mu_{n,k}$  і ВФ  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$ , які є ядрами інтегрального перетворення (9), зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

У підрозділі 3.6 знайдено норми ВФ оператора Лапласа у циліндричній системі координат для двовимірної обмеженої області методами скінченних елементів і Гальоркіна за допомогою симплекс-елементів першого порядку.

Норма в (13) обчислюється за формулою

$$\|\phi(x, y, \mu_{n,k})\|^2 = \iint_D x \cdot \phi^2(x, y, \mu_{n,k}) d\sigma = \sum_e \iint_e x \phi_e^2(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Підставляючи значення функції форми з (6) в (14) і використовуючи для координат площі формулу інтегрування, одержуємо

$$\|\phi(x, y, \mu_{n,k})\|^2 = \frac{1}{10} \sum_e \left\langle x_1 \phi_1^2 + x_2 \phi_2^2 + x_3 \phi_3^2 + \frac{1}{3} \{ \phi_1 [2x_1(\phi_2 + \phi_3) + \phi_1(x_2 + x_3) + x_2 \phi_3] + \right. \\ \left. \phi_2 [2x_2(\phi_1 + \phi_3) + \phi_2(x_1 + x_3) + \phi_1 x_3] + \phi_3 [2x_3(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3(x_1 + x_2) + x_1 \phi_2] \} \right\rangle S_e, \quad (15)$$

де  $S_e$  – площа трикутного симплекс-елемента.

Таким чином, норма ВФ знайдених методом МСЕ у формі Гальоркіна за допомогою симплекс-елементів першого порядку оператора Лапласа у циліндричній системі координат для двовимірної обмеженої області обчислюється за формулою (15), що значно спрощує формулу оберненого перетворення (13) для інтегрального перетворення (9).

У підрозділі 3.7 розроблено метод знаходження ВЗ і ВФ оператора Лапласа у циліндричній системі координат для двовимірної обмеженої області методом МСЕ у формі Гальоркіна за допомогою трикутних елементів другого порядку. Для цього розбиваємо область на трикутні елементи другого порядку (рис. 3). Після того, як досліджувана область  $\Xi$  розділена на множину елементів  $\Omega_e$  (рис. 2, рис. 3), ВФ  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$  у середині симплекс-елемента виражається формулою (7). Після застосування до задачі (10)–(12) методу МСЕ у формі Гальоркіна для трикутних елементів другого порядку знаходження ВЗ  $\mu_{n,k}$  і ВФ  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$ , які є ядрами

інтегрального перетворення (9), в роботі зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

У підрозділі 3.8 досліджується працездатність нових інтегральних перетворень на тестових завданнях. У роботі розроблено програмне забезпечення для операційної системи Windows у середовищі GNU Octave для знаходження ВЗ і ВФ методом МСЕ у двовимірних областях із можливістю візуалізації отриманого рішення.

На рис. 4–5 представлено результат абсолютного  $\Delta\mu_k = \left| \mu_k^{анал.} - \mu_k^{розр.} \right|$  і

відносного відхилення  $\delta\mu_k = \left| \frac{\mu_k^{анал.} - \mu_k^{розр.}}{\mu_k^{анал.}} \right|$ , аналітично знайдених методом Фур'є першого ( $\mu_1=19,74$ ), п'ятого ( $\mu_5=128,55$ ) і десятого ( $\mu_{10}=256,61$ ) ВЗ оператора Лапласа у випадку квадрата із довжиною сторін, що дорівнюють одиниці, від розрахованих за допомогою розробленого методу для симплекс-елементів першого порядку в залежності від кількості трикутників триангуляції  $N_{\Delta}$ .

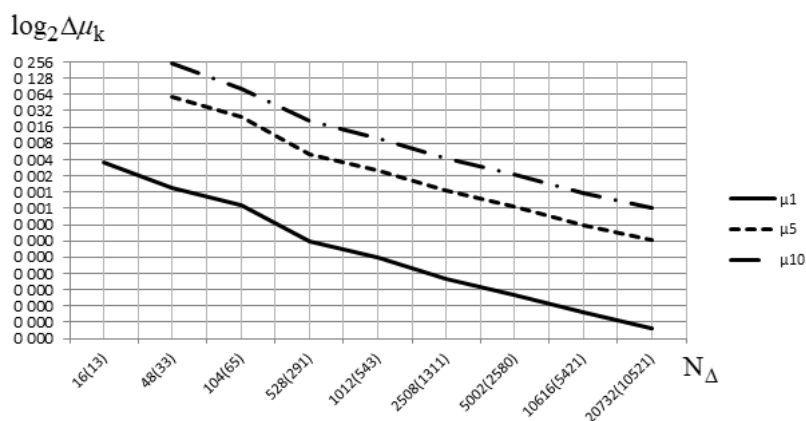


Рисунок 4 – Абсолютне відхилення ВЗ  $\mu_1$ ,  $\mu_5$  і  $\mu_{10}$

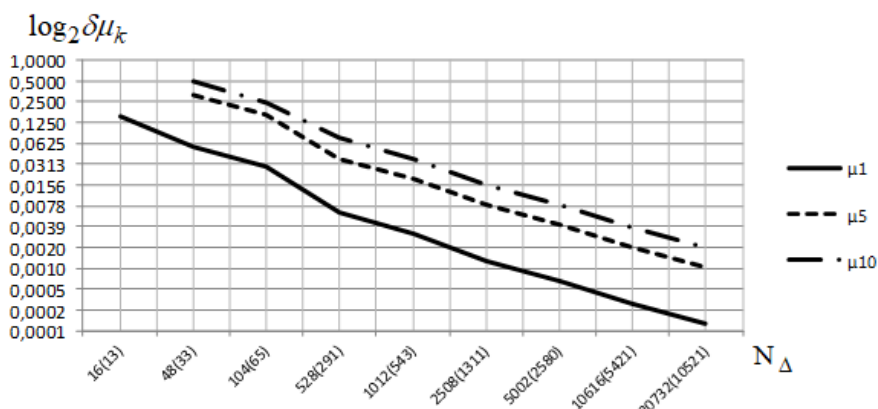


Рисунок 5 – Відносне відхилення ВЗ  $\mu_1$ ,  $\mu_5$  і  $\mu_{10}$

На рис. 6–8 представлено результати максимального відхилення за модулем

$$\max \Delta\phi_k = \max_{x,y} \left| \phi_k^{анал.}(x,y) - \phi_k^{розр.}(x,y) \right|,$$



середнього відхилення за модулем

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N_{\Delta}} \sum_e \left| \phi_e^{анал.}(x, y) - \phi_e^{розр.}(x, y) \right|$$

і дисперсії середнього відхилення за модулем

$$D(\phi) = \frac{1}{N_{\Delta}} \sum_e \left( \left| \phi_e^{анал.}(x, y) - \phi_e^{розр.}(x, y) \right| - \bar{\phi} \right)^2,$$

де  $\phi_e^{анал.}(x, y)$  – аналітично знайдені ВФ для ВЗ  $\mu_1, \mu_5$  і  $\mu_{10}$ , оператора Лапласа у випадку квадрата із довжиною сторін, що дорівнюють одиниці, а  $\phi_e^{розр.}(x, y)$  розраховані ВФ за допомогою розробленого методу для симплекс-елементів першого порядку.

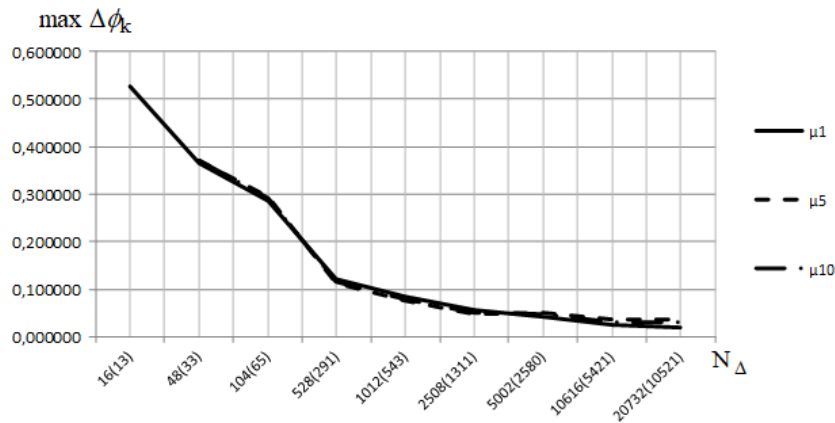


Рисунок 6 – Максимальне відхилення за модулем

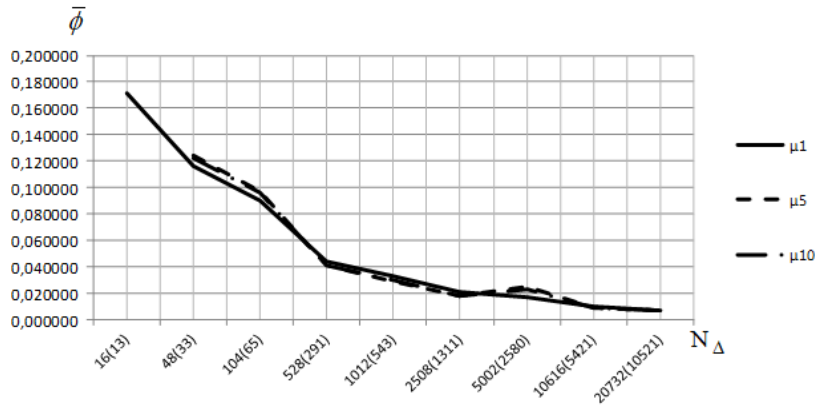


Рисунок 7 – Середнє відхилення за модулем

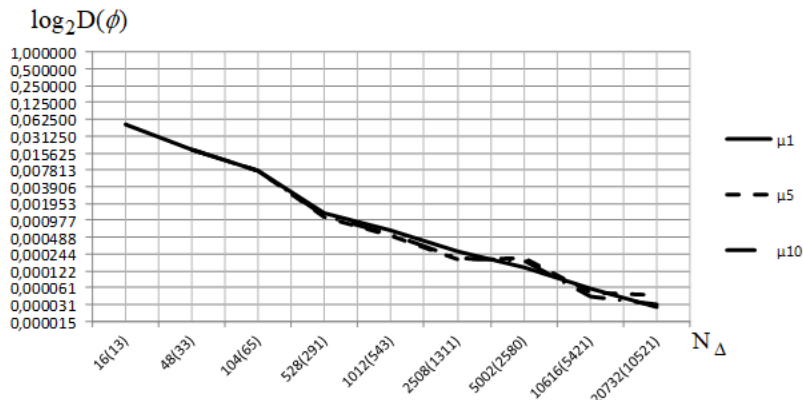


Рисунок 8 – Дисперсія відхилення за модулем аналітично знайдених ВФ

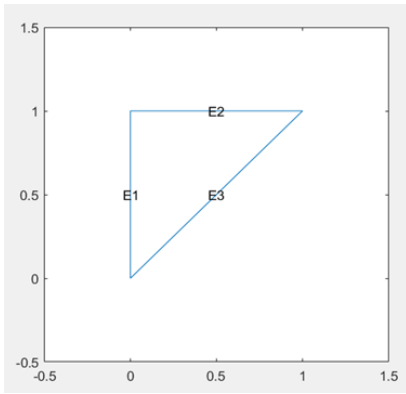


Рисунок 9 – Трикутна область

Розглянутий у попередньому розділі аналітичний розв'язок для прямокутної області виконаний для декартової системи координат. Для тіл обертання доцільно використовувати циліндричну систему координат. Для тестування розроблених методів розглянемо знаходження ВЗ  $\mu_{n,k}$  та ВФ  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$  рівняння (10) для трикутної області (рис. 9) з граничними умовами першого роду  $\phi|_{x=0} = \phi|_{y=1} = \phi|_{y=x} = 0$ .

Оскільки для даної області аналітичного рішення не існує, будемо порівнювати за модулем отримані ВЗ  $\mu_{n,k}^j$  для  $j$ -ї кількості трикутників із попередніми ВЗ  $\mu_{n,k}^{j-1}$ , знайденими для  $(j-1)$  кількості трикутників триангуляції:  $\varepsilon abs_k = |\mu_{n,k}^j - \mu_{n,k}^{j-1}|$ , де  $\varepsilon abs_k$  – абсолютна похибка для  $k$ -го ВЗ. Тоді відношення  $\varepsilon vid_k = \frac{|\mu_{n,k}^j - \mu_{n,k}^{j-1}|}{\mu_{n,k}^j}$  є відносною похибкою. На рис. 10–11 представлені результати абсолютної  $\varepsilon abs_k$  і відносної  $\varepsilon vid_k$  похибок для знайдених першого ( $\mu_{0,1}=41,36$ ), десятого ( $\mu_{0,10}=241,56$ ) і п'ятдесятого ( $\mu_{0,50}=1409,34$ ) ВЗ, для симплекс-елементів першого порядку при  $n=0$ , розрахованих за допомогою програми.

Так само, як і для трикутної області, оцінимо точність отриманих ВЗ для області, утвореної дугою кола (рис. 12). Граничні умови для цієї області такі:

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{y=1} = \phi|_{x^2 + (y-1)^2 = 1} = 0.$$

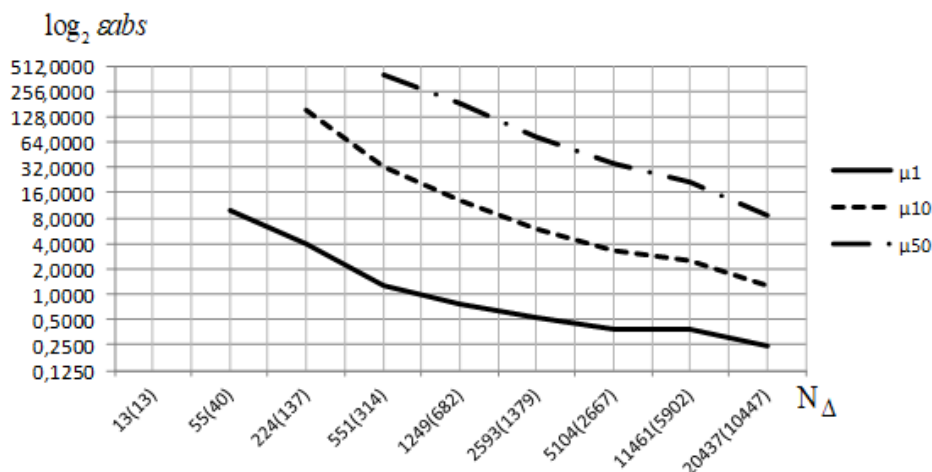


Рисунок 10 – Абсолютна похибка знайдених ВЗ трикутної області

На рис. 13 представлені результати відносної похибки для знайдених першого ( $\mu_{0,1}=22,21$ ), десятого ( $\mu_{0,10}=200,40$ ) і п'ятдесятого ( $\mu_{0,50}=901,62$ ) ВЗ, для симплекс-елементів першого порядку при  $n=0$ , розрахованих за допомогою програми.

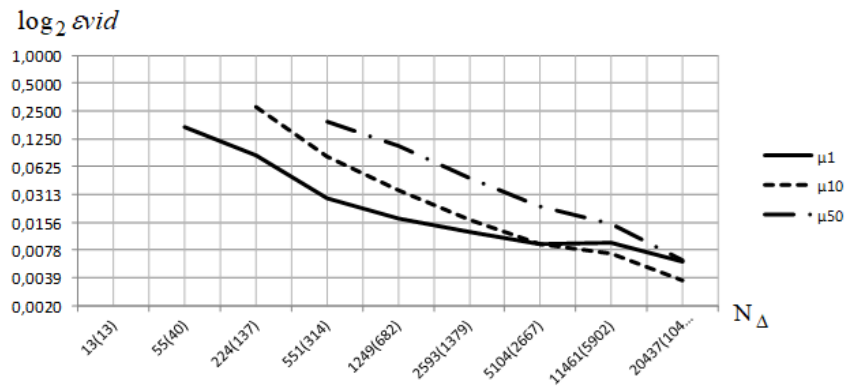


Рисунок 11 – Відносна похибка знайдених ВЗ трикутної області

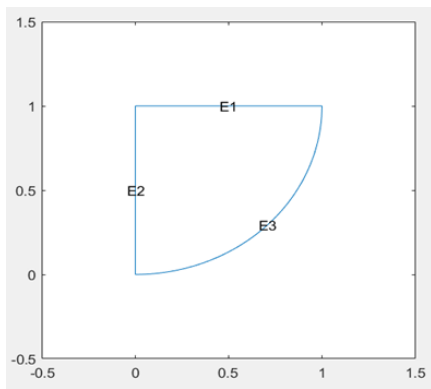


Рисунок 12 – Область, утворена дугою кола

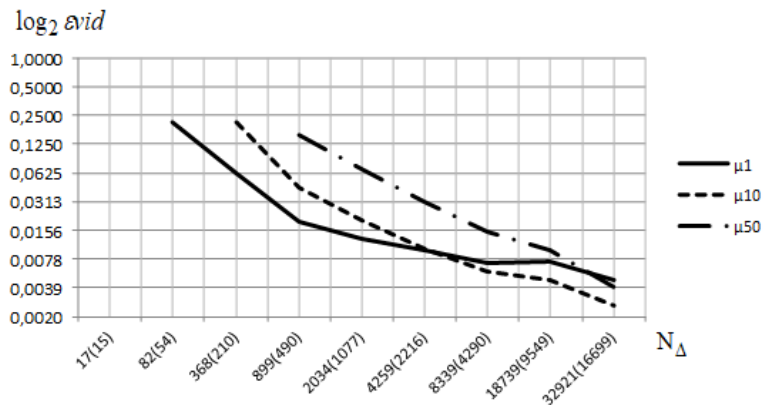


Рисунок 13 – Відносна похибка знайдених ВЗ області, утвореної дугою кола

Оцінимо точність отриманих ВЗ для області, утвореної гілкою параболи (рис. 14). Граничні умови для цієї області  $\varphi|_{x=0} = \varphi|_{y=1} = \varphi|_{y=x^2} = 0$ .

На рис. 15 представлені результати відносної похибки для знайдених  $\mu_{0,1}=27,6$ ,  $\mu_{0,10}=242,1$  і  $\mu_{0,50}=1093,3$  ВЗ, для симплекс-елементів першого порядку при  $n=0$ , розрахованих за допомогою програми.

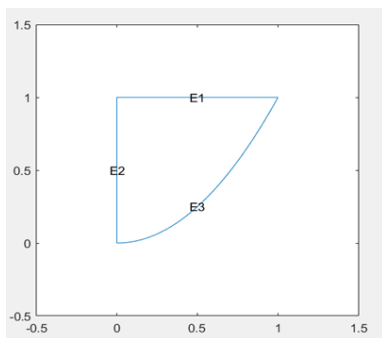


Рисунок 14 – Область, утворена гілкою параболи

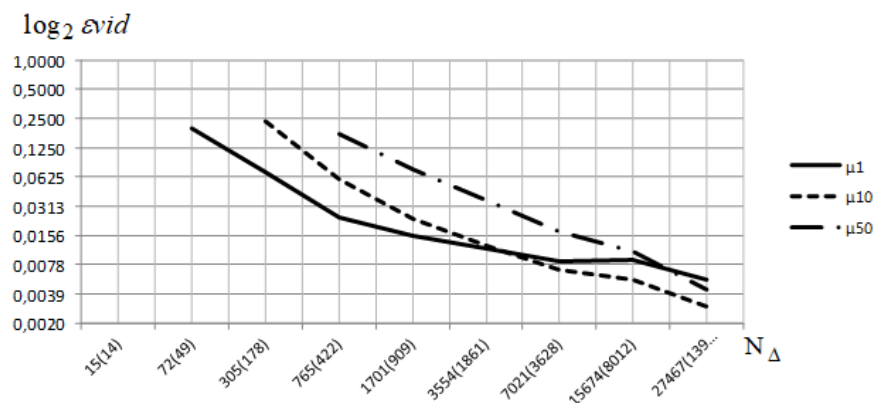


Рисунок 15 – Відносна похибка знайдених ВЗ для області, утвореної гілкою параболи

Оцінимо точність отриманих ВЗ для області утвореної гіперболами (рис. 16).

На рис. 17 представлені результати відносної похибки для знайдених першого  $\mu_{0,1} = 49,24$ ,  $\mu_{0,10} = 369.05$ ,  $\mu_{0,50} = 1487.86$  ВЗ, для симплекс-елементів першого порядку при  $n=0$ , розрахованих за допомогою програми.

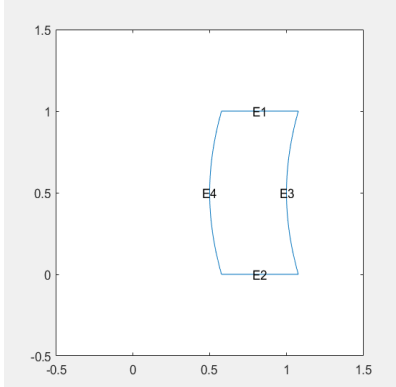


Рисунок 16 – Область, утворена гіперболами

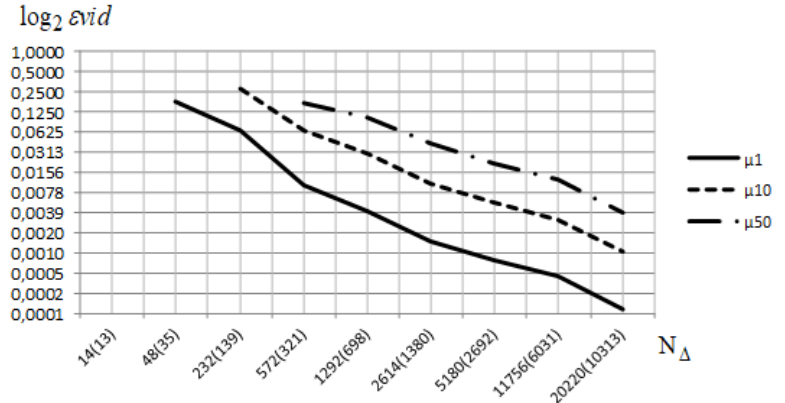


Рисунок 17 – Відносна похибка знайдених ВЗ для області, утвореної гіперболами

Для перевірки працездатності нового інтегрального перетворення проведемо розрахунки розв'язків крайової задачі для рівняння Лапласа, отриманих за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення (1) і відомого аналітичного розв'язку. Відомо, що розв'язок рівняння Лапласа в прямокутній області  $D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$  із граничними умовами

$$u(0, y) = V, u(a, y) = u(x, b) = u(x, 0) = 0 \quad (16)$$

має вигляд

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{(2k+1)(a-x)\pi}{b} \right] \sin \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{b} \right]}{(2k+1) \operatorname{sh} \left[ \frac{(2k+1)\pi a}{b} \right]}, \quad (17)$$

де  $\operatorname{sh}(x)$  – гіперболічний синус.

У роботі знайдено розв'язок рівняння Лапласа з граничними умовами на границі (16) за допомогою нового інтегрального перетворення (1) і методом МСЕ у формі Гальоркіна за допомогою симплекс-елементів першого порядку у вигляді

$$u(x, y) = V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(x, y, \mu_k) \cdot \sum \Theta_k^e}{\mu_k \cdot \|\phi(x, y, \mu_k)\|^2}, \quad (18)$$

$$\text{де } \Theta_k^e = \frac{1}{2S_e} \begin{cases} \phi_j(y_k - y_i)^2, & \text{де } x_k = x_i = 0, \\ \phi_i(y_j - y_k)^2, & \text{де } x_j = x_k = 0, \\ \phi_k(y_i - y_j)^2, & \text{де } x_i = x_j = 0. \end{cases}$$

У роботі знайдено квадрат норми ВФ:

$$\|\phi(x, y, \mu_k)\|^2 = \iint_D \phi^2(x, y, \mu_k) d\sigma = \frac{1}{6} \sum_e [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_3] \cdot S_e. \quad (19)$$

Згідно з одержаною формулою оберненого перетворення (19), а також враховуючи (18), одержуємо шуканий розв'язок

$$u(x, y) = 6 \cdot V \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(x, y, \mu_k) \cdot \sum_e \Theta_k^e}{\mu_k \sum_e [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_3] \cdot S_e}. \quad (20)$$

На рис. 18 представлено результати розрахунку розв'язку рівняння Лапласа у випадку квадрата з довжиною сторін, рівною одиниці, за аналітичним розв'язком за формулою (17) і за отриманим розв'язком (20), одержаним за допомогою нового інтегрального перетворення (1).

Ці результати були отримані для 228 симплекс-елементів першого порядку і 135 вузлів. Максимальне відхилення за модулем цих рішень становить 0,096, математичне сподівання відхилень – 0,009, а дисперсія відхилень – 0,001.

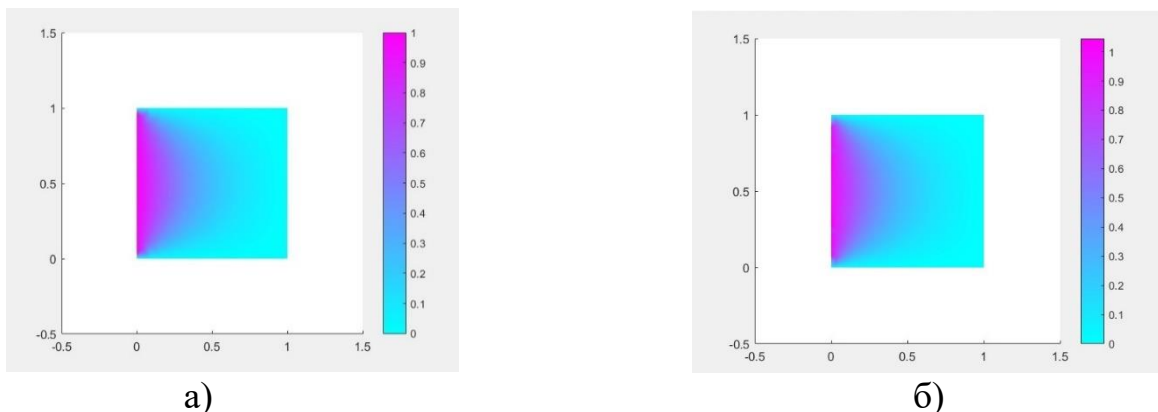


Рисунок 18 – Результати розрахунку аналітичного розв'язку рівняння Лапласа (а) і результати розрахунку розв'язку рівняння Лапласа, одержаного за допомогою нового інтегрального перетворення (б)

**Четвертий розділ** дисертаційної роботи присвячений математичному моделюванню температурних полів в циліндрах, що обертаються. При великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на

теплообмін стає помітним. У роботі вперше одержано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot \text{grad} T + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{V} \cdot \text{grad} T) \right] \right\} = (\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T)) - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V (\nabla \cdot \bar{V}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{V}]) + (\bar{V} \cdot [\nabla \cdot \tau]) - \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T)) - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V (\nabla \cdot \bar{V}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{V}]) + (\bar{V} \cdot [\nabla \cdot \tau]) \right\}, \quad (21)$$

де  $\gamma$  – щільність середовища;  $c$  – питома теплоємність;  $\tau$  – тензор напруг;  $\bar{V}$  – вектор локальної швидкості середовища;  $\nabla$  – оператор Гамільтона «набла»;  $p$  – тиск;  $T$  – температура середовища;  $t$  – час.

З рівняння (21) одержано узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні в циліндричній системі координат:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \quad (22)$$

Відомо, що умови стійкості обчислень у методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационарних невісесиметричних температурних полів циліндра, що обертається, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - 2 \frac{\Delta F_o}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0,$$

де  $F_o$  – критерій Фур'є;  $Pd$  – критерій Предводителєва.

Якщо  $Pd = 10^5$ , що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра  $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$  радіусом 100 мм, змінні  $\Delta \varphi$  і  $\Delta F_o$  повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta \varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови  $Bi=5$  ( $Bi$  – критерій Біо) час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює  $F_o \approx 0.025$ . Це означає, що потрібно принаймні здійснити  $1.3 \cdot 10^8$  операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури. Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити  $3.14 \cdot 10^5$  операцій, оскільки внутрішній стан у кільці характеризується

$3.14 \cdot 10^5$  точками. У результаті кількість обчислень, необхідних для отримання чисельного результату, стає зовеликою. Тому для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестационарних процесів теплообміну в циліндрах, що обертаються, застосовуються інтегральні перетворення.

**Підрозділ 4.1** присвячений побудові математичної моделі і методу рішення узагальненої крайової задачі Діріхле теплообміну суцільного циліндра, що обертається. Розглядається розрахунок нестационарного невісесиметричного температурного поля суцільного циліндра в циліндричній системі координат, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ скінченної довжини L, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна  $G_0$ , а на поверхні циліндра температура залежить від часу  $G(\varphi, z)$ .

Математично задача визначення температурного поля циліндра  $T(r, \varphi, z, t)$  полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (22) в області  $D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), F_0 \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = \frac{a}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right]$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0$$

і граничними умовами

$$\theta(1, \varphi, z, t) = V(\varphi, z),$$

$$\theta(\rho, \varphi, 0, t) = 0, \quad \theta(\rho, \varphi, 1, t) = 0,$$

де  $\theta = \frac{T(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  – відносна температура циліндра;

$T_{\max} = \max_{\varphi, z} G(\varphi, z)$ ;  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $z = \frac{Z}{L}$ ; R – зовнішній радіус циліндра;

$\chi = (R/L)^2$ ;  $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$  – коефіцієнт теплопровідності.

За допомогою інтегральних перетворень Фур'є, Ханкеля і Лапласа знайдено температурне поле суцільного циліндра, що обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла у вигляді ортогональних рядів за спеціальними функціями:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \widehat{\theta}_n^{(1)} + i \widehat{\theta}_n^{(2)} \right] \sin(\pi m z) \right\rangle \frac{J_n(\mu_{n,k} \rho)}{[J'_n(\mu_{n,k})]^2} \right\} \exp(in\varphi), \quad (23)$$

$$\text{де } \widehat{\theta}_n^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \widehat{W}_n^{(1)} \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] + \widehat{W}_n^{(2)} \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot$$

$$\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \widehat{W}_n^{(1)} \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] + \widehat{W}_n^{(2)} \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\}$$

$$\left( e^{s_j t} - 1 \right);$$

$$\widehat{\theta}_n^{(2)} = \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \widehat{W}_n^{(2)} \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] - \widehat{W}_n^{(1)} \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot$$

$$\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \widehat{W}_n^{(2)} \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] - \widehat{W}_n^{(1)} \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot$$

$$\left( e^{s_j t} - 1 \right);$$

$$\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}, \text{ а значення } s_j \text{ для } j=1,2,3,4 \text{ визначаються за}$$

формулами:

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},$$

$$s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r};$$

$$W_n^{(i)} = J'_n(\mu_{n,k}) V_n^{(i)}; \quad q_{n,k} = \frac{a}{R^2} \cdot (\mu_{n,k}^2 + \chi \lambda_m^2); \quad \lambda_m = \pi \cdot m; \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Для розрахунку температурних полів  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  у суцільному циліндрі за отриманою формулою (23) було здійснено програмну реалізацію на мові об'єктно-орієнтованого програмування C#, реалізовано у середовищі розробки Visual Studio 2010 та функціонує на будь-якій операційній системі, де встановлено Microsoft .NET Framework версії 4.0 або вище. При чисельних розрахунках знаходження суми рядів були замінені на часткові суми з точністю  $10^{-4}$ . Для перевірки математичної моделі проведено розрахунки за допомогою розробленого програмного забезпечення, температурного поля в суцільному циліндрі. Температура на поверхні циліндра задавалась у вигляді

$$\theta(1, \varphi, z, t) = \Theta_1(\varphi) \eta(l_1 - z) + \Theta_2(\varphi) [\eta(1 - l_2 - z) - \eta(l_1 - z)] + \Theta_3(\varphi) [\eta(1 - z) - \eta(1 - l_2 - z)], \quad (24)$$

$$\text{де } \Theta_1(\varphi) = \Theta_3(\varphi) = 0,2; \quad l_1 = l_2 = 0,25; \quad L = 1;$$



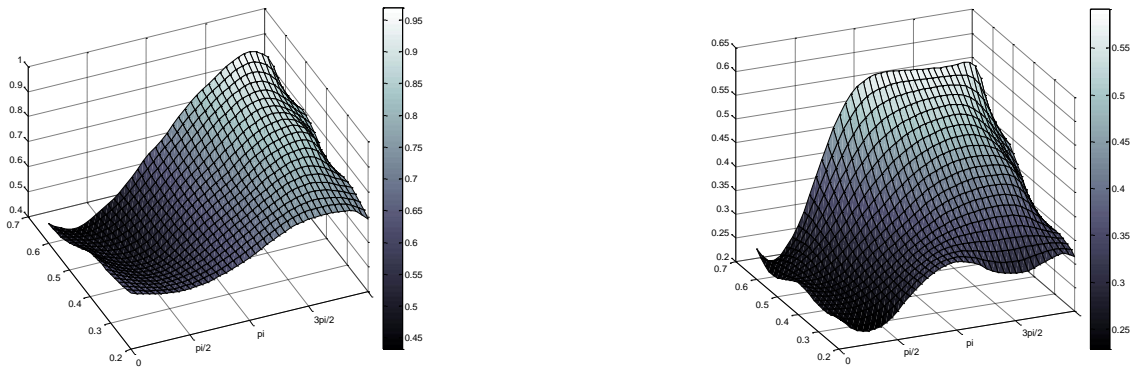
$$\eta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0; \end{cases}$$

$$\Theta_2(\varphi) = 2 \cdot \pi^{-1} \cdot \varphi \cdot \eta(0.5\pi - \varphi) + \eta(1.5\pi - \varphi) - \eta(0.5\pi - \varphi) + \left[ 1 + 2 \cdot \pi^{-1} \cdot \eta(1.5\pi - \varphi) \right] \cdot [\eta(2 \cdot \pi - \varphi) - \eta(1.5\pi - \varphi)], \quad (25)$$

Необхідні для розрахунку властивості матеріалу циліндра такі:

$$\lambda = 34,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; c = 560 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}; \gamma = 7800 \text{ кг/м}^3, \tau_r = 10^{-11} \text{ сек}.$$

На рис. 19 представлено результати чисельних експериментів у вигляді кривих розподілу температури при таких значеннях параметрів:  $z=0,5$ ,  $Pd=10$ .



а)

б)

Рисунок 19 – Розподіл температурного поля в циліндрі при  $F_0 = 0.9$  (а) і при  $F_0 = 0.1$  (б)

У підрозділі 4.2 вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури в суцільному циліндрі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, кінцевої довжини у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. За допомогою кінцевих інтегральних перетворень Ханкеля, Фур'є, Лапласа знайдено температурне поле у циліндрі у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є.

У підрозділах 4.3, 4.4 вперше побудовано математичні моделі розрахунку полів температури в порожньому циліндрі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, кінцевої довжини у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле та Неймана. За допомогою кінцевих інтегральних перетворень Ханкеля, Фур'є, Лапласа знайдено температурні поля у циліндрах у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є.

У підрозділі 4.5 вперше побудовано математичну модель нестационарного температурного поля суцільної двоскладової скінченної довжини  $L$  зовнішнього радіуса  $R$  у циліндричній системі координат, неоднорідного вздовж радіуса циліндра, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $OZ$ , із урахуванням

відомого часу релаксації поширення тепла. Теплофізичні властивості циліндра в кожному шарі є сталими за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла в циліндрі відсутні. У початковий момент часу температура циліндра є сталою  $G_0$ , а на зовнішній поверхні циліндра температура  $G(\varphi, z)$ . Відносну температуру циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  представимо у вигляді

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \begin{cases} \theta_1(\rho, \varphi, z, t), & \text{якщо } \rho \in (\rho_0, \rho_1), \\ \theta_2(\rho, \varphi, z, t), & \text{якщо } \rho \in (\rho_1, \rho_2). \end{cases}$$

Відносні температури  $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$  s-го шару циліндра обчислюються за формулою

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, t) = \frac{T_s(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0},$$

де  $T_s(\rho, \varphi, z, t)$  – температури s-го шару циліндра;

$T_{\max}$  – максимальна температура циліндра;

s=1,2.

Крайова задача математичної фізики визначення відносної температури циліндра  $\theta(\rho, \varphi, z, t)$  полягає в інтегруванні гіперболічного диференціального рівняння (22) в області  $D_s = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (\rho_{s-1}, \rho_s), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$  з початковими умовами

$$\theta_s(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_s(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0,$$

граничними умовами

$$\theta_2(1, \varphi, z, t) = V(\varphi, z),$$

$$\theta_s(\rho, \varphi, 0, t) = 0, \quad \theta_s(\rho, \varphi, 1, t) = 0,$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1, \varphi, z, t) = \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t),$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(\rho_1, \varphi, z, t)}{\partial \rho},$$

де  $\rho_1 = \frac{R_1}{R}$ ;  $\rho_0 = 0$ ;  $\rho_2 = 1$ ;  $R_1$  – радіус межі шарів;  $\lambda_s$  – коефіцієнт теплопровідності, s-го шару циліндра;  $\gamma_s$  – щільність, s-го шару циліндра;  $c_s$  – питома теплоємність s-го шару циліндра;  $a_s = \frac{\lambda_s}{c_s \gamma_s}$  – коефіцієнт температуропровідності s-го шару циліндра;  $\alpha_s^2 = \frac{a_s}{R^2}$ ; s=1,2.

За допомогою розробленого інтегрального перетворення, а також інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено чисельно-аналітичний розв'язок одержаної узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Для перевірки математичної моделі проведено розрахунки за допомогою розробленого програмного забезпечення температурного поля. Температура на поверхні циліндра задавалась у вигляді (24), (25), де  $\theta(\rho, \varphi, 0, t) = \theta(\rho, \varphi, 1, t) = 0$ .

Необхідні для розрахунку властивості матеріалу циліндра такі:

$$\lambda_1 = 34,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \tau_r = 10^{-11} \text{ сек}; c_1 = 560 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}; c_2 = 570 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$\gamma_1 = 7800 \text{ кг/м}^3; \gamma_2 = 7820 \text{ кг/м}^3; \sigma = 1,5.$$

На рис. 20 представлено результати чисельних експериментів у вигляді кривих розподілу температури при таких значеннях параметрів:  $z=0,5$ ,  $Pr=10$ . Як видно, температурне поле при  $\rho < 0,2$  є вісесиметричним, а амплітуда коливань температури з часом зменшується.

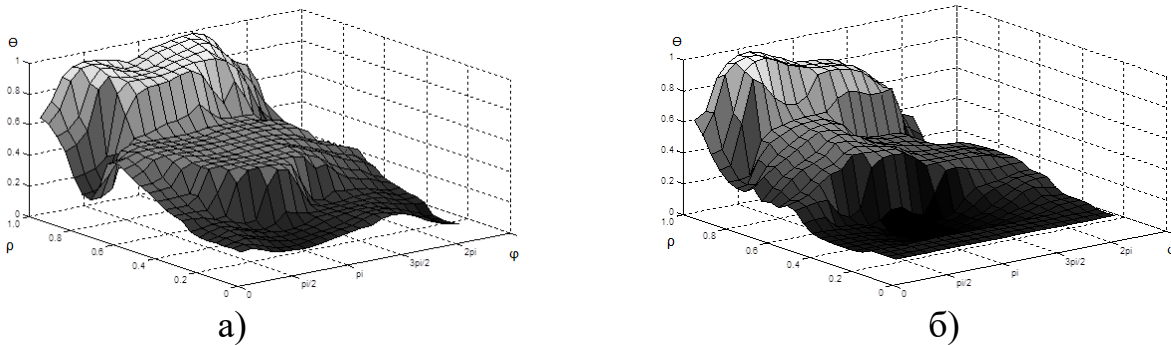


Рисунок 20 – Розподіл температурного поля в циліндрі при  $F_0 = 0.1$  (а) і при  $F_0 = 0.5$  (б)

У підрозділі 4.6 вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури у суцільному двоскладовому циліндрі кінцевої довжини, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. За допомогою розробленого інтегрального перетворення, а також інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено аналітичний розв'язок одержаної узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є.

У підрозділах 4.7, 4.8 вперше побудовано математичні моделі розрахунку полів температури у порожньому двоскладовому циліндрі кінцевої довжини, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле та Неймана. За допомогою розробленого інтегрального перетворення, а також інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено аналітичний розв'язок одержаних

узагальнених крайових задач теплообміну циліндра у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є.

У підрозділі 4.9 проведено порівняння отриманих результатів із відомими теоретичними і експериментальними дослідженнями аналогічних задач. Суцільний циліндр, що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ довжини L із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла можна розглядати як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку. Тепловий потік, який діє на валок, є наслідком взаємодії з розжареним металевим листом. Тому знайдений чисельно-аналітичний розв'язок (23) може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у прокатних валках. Розподіл відносної температури  $\theta(\varphi)$  на поверхні робочого валка листопркатного стану [Шичков А.Н., 1974] має вигляд згідно рис. 21а. У зоні  $\varphi_1$  верхній і нижній робочі валки контактують із прокатним металом. У зоні  $\varphi_3$  на поверхню валка подається охолоджуюча рідина. У зонах  $\varphi_2, \varphi_4$  валок сприймає тепловий потік шляхом променистого теплообміну з металу, що прокочується. Зі зменшенням  $\rho$ , якщо  $R_d$  є стала величина, невісесиметрична складова температурного поля затухає і при відстані менше  $R_s$  нею можна знехтувати. При  $\rho < R_s$  можна вважати поле тільки вісесиметричним.

На рис. 21 б наведено графіки, які показують зміни  $R_s$  від  $R_d$  наведених у роботі Шичкова А.Н. і розрахованих за формулою (23) для коефіцієнта температуропровідності валка  $a = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$ . У зв'язку з тим, що на існуючих станах значення  $R_d$  може змінюватися в широких межах по осі абсцис, наведено три шкали. Математичне сподівання відхилення відомого значення  $R_s$  із розв'язком за формулою (23) становить 0,12, а середнє квадратичне відхилення становить 0,03.

На рис. 22 а представлено результати моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160 температурного поля робочого валка стану 1700, для випадку  $\frac{b}{L} = 0.75$  ( $b$  – ширина прокатної смуги,  $L$  – довжина бочки валка) і розрахункові дані температурного поля, знайденого за формулою (23). По осі абсцис відкладене відношення  $z/L$ , а по осі ординат відносна температура валка  $\theta$ . Ламана лінія (а) відповідає розподілу температури на поверхні бочки валка, крива (b) на глибині 2 мм і крива (c) середня в радіальному перетині, крива (d) – розрахункова температура валка, знайдена за формулою (23) на відстані 2 мм від поверхні валка. Математичне сподівання відхилення температурного поля робочого валка стану 1700, одержаного за допомогою моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160 і температурного поля валка, розрахованого за формулою (23), становить 0,13, а середнє квадратичне відхилення – 0,045.

На рис. 22 б представлено результати моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160 відносної температури робочого валка дресирувального стану 1700 і температури валка, розрахованого за формулою (23).

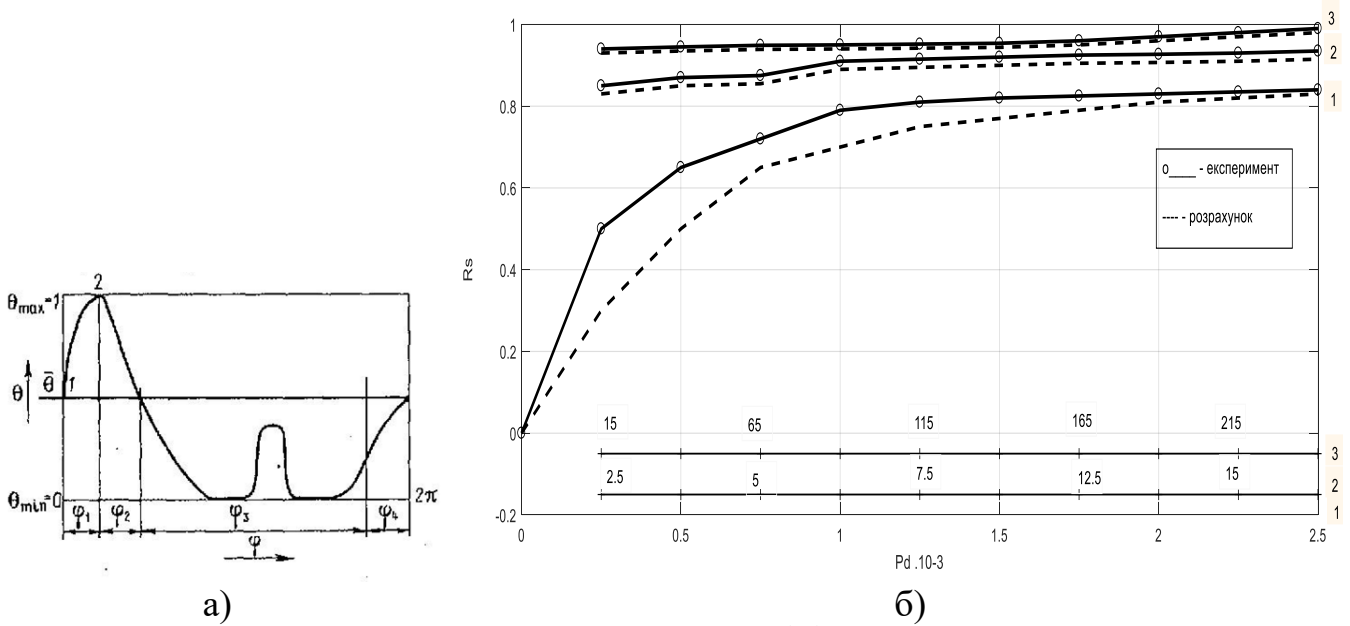


Рисунок 21 – Розподіл відносної температури  $\theta(\varphi)$  на поверхні робочого валка (а), залежність  $R_s$  від  $Pd$  (б)

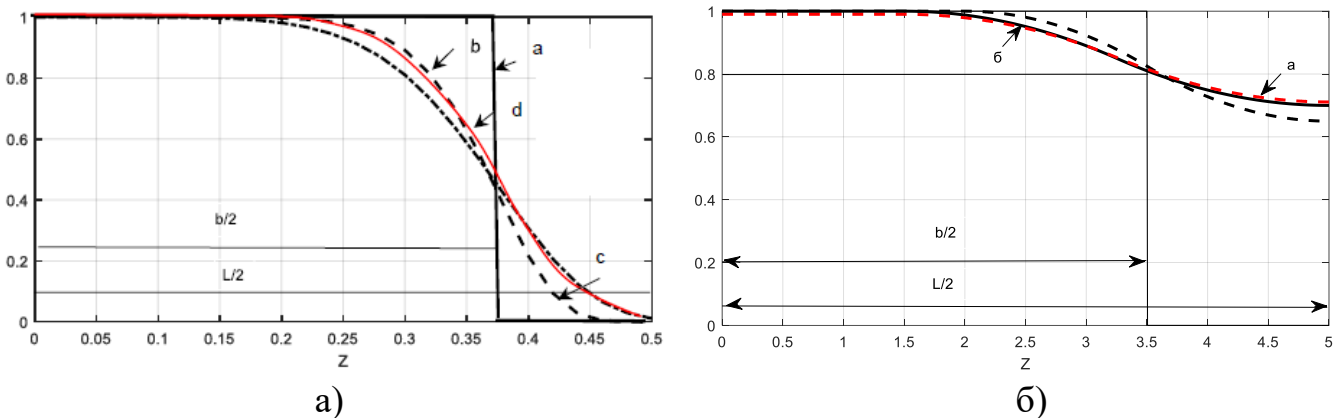


Рисунок 22 – Відносна температура робочого валка стану 1700 (а), відносна температура робочого валка дресировального стану 1700 (б)

По осі абсцис відкладене відношення  $z/L$ , а по осі ординат – відносна температура валка  $\theta$ . Крива (б) відповідає розподілу температури на поверхні бочки валка, одержаного в результаті моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160, а крива (а) – температурі валка, розрахованої за формулою (23). Математичне сподівання відхилення температурного поля робочого валка дресировального стану 1700, одержаного за допомогою моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160 і температурного поля робочого валка, розрахованого за формулою (23), становить 0,12, а середнє квадратичне відхилення – 0,04. На рис. 23 наведено результати натурних випробувань температури валка, які здійснювалися на третій кліті стану 1700 гарячої прокатки листа Череповецького металургійного заводу. Заміри проводилися під час прокатки металу товщиною 2,75 мм і шириною 1045 мм із підкату 23 мм. При цьому температура листа у третій кліті була  $970^{\circ}\text{C}$ . Кут

установки проводки на стороні входу металу  $45^0$ . Температурне поле на поверхні робочого валка уздовж його бочки заміряли в період паузи контактною термопарою при настанні квазістаціонарного режиму. По осі абсцис відкладена довжина бочки валка  $L$ , а по осі ординат температура його поверхні в градусах Цельсія.

На рис. 23 також наведено значення температури на поверхні валка, розрахованого за формулою (23). Математичне сподівання відхилення відносного температурного поля поверхні робочого валка, одержаного в результаті натурних випробувань, які здійснювалися на третій клітці стану 1700 гарячої прокатки листа Череповецького металургійного заводу і температурного поля валка, розрахованого за формулою (23), становить 0,15, а середнє квадратичне відхилення – 0,045.

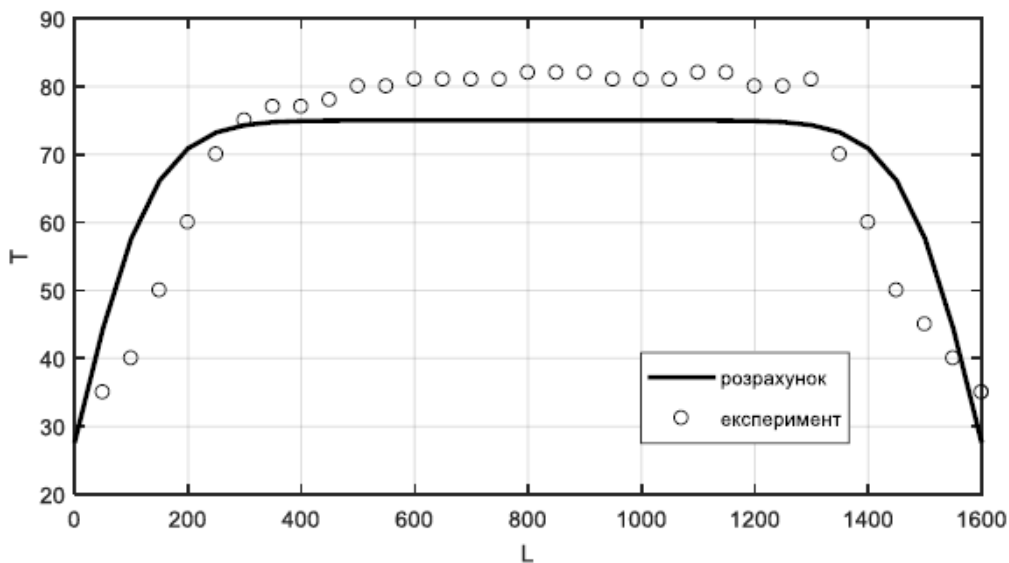


Рисунок 23 – Залежність температури валка від довжини валка  $L$

**П'ятий розділ** дисертаційної роботи присвячено побудові математичних моделей і методів рішення узагальнених крайових задач теплообміну тіл, що обертаються.

**Підрозділ 5.1** присвячено побудові математичної моделі і методу рішення узагальненої задачі Діріхле теплообміну ізотропного тіла, що обертається. Вперше розглядається розрахунок температурного поля тіла обертання (рис. 24 а) з твірною лінією  $r = \xi(z)$  у циліндричній системі координат. Ізотропне тіло обертання обмежене двома торцями  $S_1 (z = 0)$ ,  $S_2 (z = h)$  і бічною поверхнею обертання  $S_3$ , яка перетинається з поверхнями  $S_j$  уздовж ліній  $L_j$ ,  $j = 1, 2$ . Тіло обертається навколо осі  $OZ$  з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна  $G_0$ , а на бічній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу  $V(\varphi, z)$ . На торцях відомі значення температури  $G_1(r, \varphi)$  і  $G_2(r, \varphi)$  при  $z=0$  і  $z=h$  відповідно.

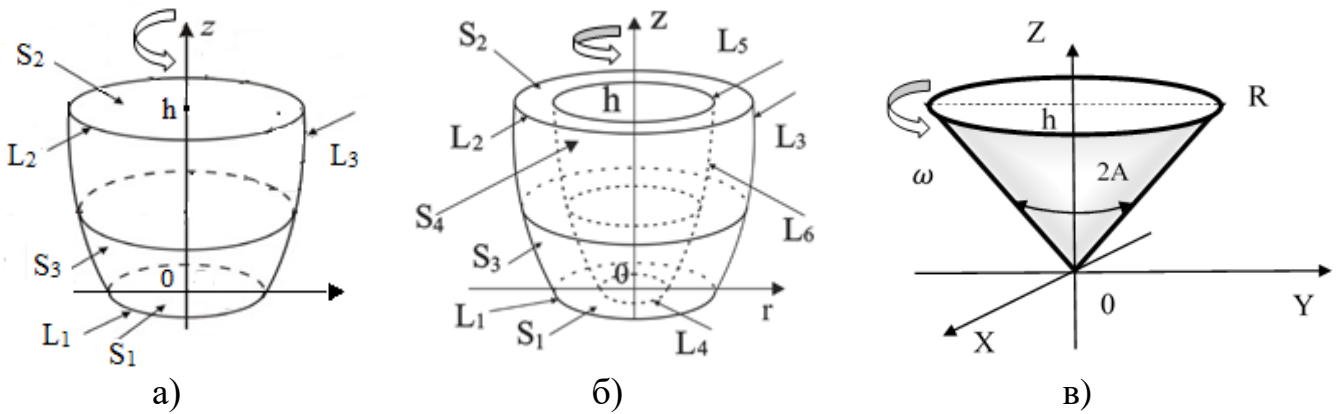


Рисунок 24 – Тіло обертання із твірною лінією  $r = \xi(z)$  (а), тіло обертання з твірними лініями  $r = \xi(z), r = \xi_1(z)$  (б), прямий круговий конус із рівнянням твірної лінії  $r = z \cdot \operatorname{tg}A$  (в)

Математично задача визначення температурного поля тіла полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (22) в області  $D = \{(r, \varphi, z, t) | r \in (0, \xi(z)), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, h), t \in (0, \infty)\}$  з початковими умовами

$$\theta(r, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0$$

і граничними умовами

$$\theta(\xi(z), \varphi, z, t) = G(\varphi, z),$$

$$\theta(r, \varphi, 0, t) = \Theta(r, \varphi), \quad \theta(r, \varphi, h, t) = \Lambda(r, \varphi),$$

де  $\theta = \frac{T(r, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  – відносна температура тіла;

$T(r, \varphi, z, t)$  – температура тіла.

За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9) знайдено температурне поле в ізотропному тілі обертання з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є.

У підрозділі 5.2 вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури в ізотропному тілі (рис. 24 а), що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9) знайдено температурне поле у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є.

У підрозділі 5.3 вперше побудовано математичну модель і розроблено метод рішення узагальненої задачі Діріхле теплообміну порожнього ізотропного тіла, що обертається. Розглядається розрахунок температурного поля тіла обертання (рис. 24 б) із твірними лініями  $L_3, L_6$ , рівняння яких  $r = \xi(z), r = \xi_1(z)$  відповідно, у циліндричній системі координат. Тіло обертання обмежене двома торцями  $S_1$

( $z=0$ ),  $S_2(z=h)$  і бічними поверхнями обертання  $S_3, S_4$ . Бічні поверхні обертання  $S_3, S_4$  перетинаються з поверхнями  $S_j$  уздовж ліній  $L_j, j=1,2$ , і  $L_k, k=4,5$  відповідно. Тіло обертається навколо осі  $OZ$  з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна  $G_0$ , а на зовнішній і внутрішній бічних поверхнях тіла відоме значення температури  $V(\varphi, z)$  і  $V_1(\varphi, z)$  відповідно. На торцях відомі значення температури  $G_1(r, \varphi)$  і  $G_2(r, \varphi)$  при  $z=0$  і  $z=h$  відповідно. За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9) знайдено температурне поле у порожньому ізотропному тілі, у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є.

У підрозділах 5.4, 5.5 вперше побудовано математичні моделі і розроблено методи розрахунку полів температури у порожньому ізотропному тілі (рис. 24 б), що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана і змішаними граничними умовами. За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9), знайдено температурні поля у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є

У підрозділах 5.6, 5.7, 5.8 вперше побудовано математичні моделі і методи розрахунку полів температури в параболоїді обертання, в півсферичному тілі та у тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, що обертаються, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9) знайдено температурні поля у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є.

У підрозділі 5.9 вперше побудовано математичну модель і метод розрахунку полів температури у тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з змішаними граничними умовами. За допомогою розробленого інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору (9) знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду за функціями Фур'є.

У підрозділі 5.10 вперше побудовано математичну модель і метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики для параболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Тепловий потік у тілі при зварюванні моделювався точковим джерелом тепла, що рухається по контуру тіла зі сталою швидкістю і відомою інтенсивністю за допомогою функції Дірака. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення для рівняння Лапласа (1) знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду.

У підрозділі 5.10 вперше побудовано математичну модель і метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики для параболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Тепловий потік у тілі при зварюванні моделювався точковим джерелом тепла, що рухається по контуру тіла



за допомогою функції Дірака. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення (1) знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду.

У підрозділі 5.11 вперше розглядається розрахунок температурного поля прямого кругового конуса (рис. 24 в) із твірною лінією  $r = z \cdot \operatorname{tg} A$  у циліндричній системі координат. Конус обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості конуса не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура постійна  $G_0$ , а на бічній поверхні конуса температура відома і не залежить від часу  $V(\varphi, z)$ . На основі конуса (при  $z=h$ ) відоме значення температури  $G_1(r, \varphi)$ .

Математично задача визначення температурного поля циліндра полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (22) в області  $D = \{(r, \varphi, z, t) | r \in (0, h \cdot \operatorname{tg} A), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, h), t \in (0, \infty)\}$  з початковими умовами

$$\theta(r, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0$$

і граничними умовами

$$\theta(z \cdot \operatorname{tg} A, \varphi, z, t) = G(\varphi, z), \quad \theta(r, \varphi, h, t) = \Lambda(r, \varphi),$$

де  $\theta = \frac{T(r, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$  – відносна температура тіла.

За допомогою розробленого інтегрального перетворення (9) знайдено температурне поле у прямому круговому конусі, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є.

Для перевірки математичної моделі проведені розрахунки за допомогою розробленого програмного забезпечення для операційної системи Windows у середовищі GNU Octave температурного поля в конусі.

Температура на поверхні конуса задавалась у вигляді

$$G(\varphi, z) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{\pi} \varphi & \text{коли } -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{коли } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi} \varphi & \text{коли } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases}.$$

Після розбиття області на симплекс-елементи першого порядку температуру конуса обчислено за формулою

$$\theta(r, z, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ b_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(r, z, \mu_{n,k}) \cdot \left( \sum_e \Theta_i^e + \Pi_i^e \right)}{\mu_{n,k} \cdot \|\phi(r, z, \mu_{n,k})\|^2} \right\} \cos(n\varphi),$$

$$\text{де } \Theta_i^e = \frac{\Psi^e}{4S_e} \begin{cases} \phi_j(r_i - r_k) (z_k^2 - z_i^2), & \text{якщо } \Pi_1, \\ \phi_i(r_k - r_j) (z_j^2 - z_k^2), & \text{якщо } \Pi_2, \\ \phi_k(r_j - r_i) (z_i^2 - z_j^2), & \text{якщо } \Pi_3; \end{cases}$$

$$\Psi^e = \frac{1}{2S_e} \left\{ (z_j - z_k)r_i + (z_k - z_i)r_j + (z_i - z_j)r_k + \frac{(r_k - r_j)r_i + (r_i - r_k)r_j + (r_j - r_i)r_k}{tgA} \right\};$$

$$\Pi_i^e = \frac{E^e}{4S_e} \begin{cases} \phi_j(z_k - z_i) (z_k^2 - z_i^2), & \text{якщо } \Pi_1, \\ \phi_i(z_j - z_k) (z_j^2 - z_k^2), & \text{якщо } \Pi_2, \\ \phi_k(z_i - z_j) (z_i^2 - z_j^2), & \text{якщо } \Pi_3; \end{cases}$$

$$E^e = \frac{1}{2S_e} \left\{ [(z_j - z_k)r_i + (z_k - z_i)r_j + (z_i - z_j)r_k] tgA + (r_k - r_j)r_i + (r_i - r_k)r_j + (r_j - r_i)r_k \right\}.$$

На рис. 25 представлено результати розрахунку розподілу температури у вигляді кривих для  $tgA = 1$ . При чисельних розрахунках знаходження суми рядів їх значення були замінені на часткові суми з точністю  $10^{-4}$ .

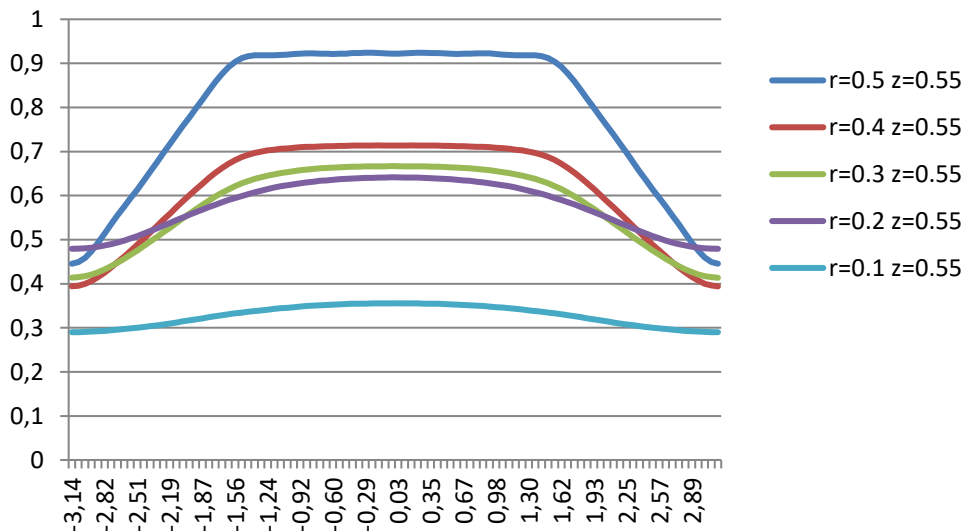


Рисунок 25 – Розподіл температури в конусі

У додатках наведено список публікацій здобувача за темою дисертації, вихідні тексти розроблених програм та довідки про впровадження результатів наукових досліджень.

## ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено важливу науково-технічну проблему моделювання явища теплопровідності в тілах, що обертаються, з урахуванням релаксації теплового потоку, що дає змогу підвищити точність розрахунку температурних полів у цих тілах. Проведені у дисертації наукові дослідження та узагальнення дають підстави для таких висновків:

1. На підставі результатів аналізу проблеми моделювання температурного розподілу в тілах, що обертаються, з урахуванням релаксації теплового потоку обґрунтовано необхідність створення нових математичних моделей процесу теплопровідності у цих тілах у вигляді узагальнених крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності і розроблення нових методів розв'язування відповідних крайових задач.

2. В роботі отримано диференційне узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла в криволінійній системі координат, що дозволяє одержувати узагальнені рівняння переносу енергії, які використовуються при моделюванні процесів теплообміну в різних системах координат.

3. В роботі побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області  $D \subset R^2$ , обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами, і нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$ . За допомогою методів скінченних елементів і Гальоркіна для симплекс-елементів першого і другого порядку розроблено метод знаходження ядер побудованих нових кінцевих інтегральних перетворень. Застосування побудованих нових кінцевих інтегральних перетворень для розв'язання крайових задач математичної фізики, які виникають при математичному моделюванні температурних полів у тілах обертання, має такі переваги перед числовими методами: незалежність обсягу обчислень від значень просторових і часових координат (як наслідок – відсутність накопичення систематичних розрахункових похибок), не викликає додаткових труднощів розрахунок потоків, середніх і локальних значень, балансних співвідношень, присутніх у будь-якій моделі, можливість використання часткових рішень, отриманих раніше, можливість використання уніфікованого набору задач для моделювання класу процесів у відповідному обладнанні, можливість аналізу і спрощення рішень для характерних і граничних значень параметрів процесу, наочність проміжних і кінцевих розрахункових результатів.

4. Побудовано математичні моделі розрахунку полів температури в суцільному і порожньому циліндрі, а також у суцільному і порожньому двоскладовому циліндрі кінцевої довжини, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді узагальнених крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана. За допомогою кінцевих інтегральних перетворень для кусочно-однорідних середовищ, а також Ханкеля, Фур'є, Лапласа

знайдено температурні поля у циліндрах у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є. Розглядаючи циліндр як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку, було проведено порівняння розрахованих температурних полів за отриманою формулою (23) з відомими теоретичними і експериментальними дослідженнями. Порівняння значень температурних полів у прокатних валках, розрахованих за формулою (23) з відомими теоретичними, одержаними в результаті моделювання на інтеграторі ЕГДА 9160 і натурними замірами температури валка, які здійснювалися на третій кліті стану 1700 гарячої прокатки листа металургійного заводу показало, що максимальне математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення температурного поля, розрахованого за формулою (23) з відомими теоретичними і експериментальними дослідженнями, є 0.15 і 0.045 відповідно.

5. Побудовано математичні моделі розрахунку полів температури у ізотропному і порожньому ізотропному тілі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайових задач для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Діріхле і Неймана і змішаних умов для порожнього ізотропного тіла. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору знайдені температурні поля у ізотропному і порожньому ізотропному тілі обертання у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є в залежності від граничних умов, що дає змогу при модулюванні температурних полів у дисках складної форми, які є найважливішим елементом багатьох машин, підвищити точність розрахунку температурних полів.

6. Вперше побудовано математичні моделі розрахунку полів температури в параболоїді, півсферичному тілі, тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді, прямому круговому конусі, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді узагальнених крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору знайдено температурні поля в цих тілах у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є, що дає змогу при модулюванні температурних полів у цих тілах підвищити точність розрахунку температурних полів.

7. Вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні у вигляді крайової задачі математичної фізики з граничними умовами Діріхле. Тепловий потік у тілі при зварюванні моделювався точковим джерелом тепла, що рухається по контуру тіла зі сталою швидкістю і відомою інтенсивністю за допомогою функції Дірака. За допомогою розробленого нового інтегрального перетворення для рівняння Лапласа, а також методу скінченних елементів у формі Гальоркіна знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду, що дозволяє отримати більш ефективні і обґрунтовані рішення про напружено-деформований стан при зварюванні з урахуванням відповідних термомеханічних процесів.

8. Результати теоретичних досліджень, виконаних у роботі, дозволили: ТОВ «ФАЙЄРФЛАЙ АЕРОСПЕЙС УКРАЇНА» використати розроблені в дисертаційній роботі узагальнені математичні моделі і методи розрахунку полів температури в

циліндрах і двоскладових циліндрах кінцевої довжини, що обертаються з постійною кутовою швидкістю, для розрахунків процесів теплообміну при проєктуванні елементів ракети-носія, про що свідчить акт впровадження матеріалів дисертації; ТОВ «Зірковий 1» використати розроблений в дисертаційній роботі метод розрахунку полів температури в довільних областях при електронно-променевому зварюванні для отримання більш ефективних і обґрунтованих рішень про напружено-деформований стан при зварюванні з урахуванням термомеханічних процесів, які протікають при зварюванні, про що свідчить акт впровадження матеріалів дисертації; ТОВ «АРМА ГРУПП» використати розроблені в дисертаційній роботі узагальнені математичні моделі і методи розрахунку полів температури в ізотропному тілі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, для визначення показників міцності теплонапружених футерувальних плит барабана барабанно-кульових млинів із урахуванням розподілу температур в умовах експлуатації. Отримані розрахунки показників міцності дозволили обрати оптимальні конструктивні геометричні розміри футерувальних плит барабана, що забезпечує більш повільний знос плит, зниження питомої витрати металу і електроенергії, підвищення продуктивності млина, про що свідчить акт впровадження матеріалів дисертації.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

### Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Бердник М. Г. Математичне моделювання просторової узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра, який обертається. *Штучний інтелект*. 2015. № 1–2. С. 134–139. (Індексується у *Google Scholar*)
2. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається. *Математичні машини і системи*. 2015. №4. С. 117–122. (Індексується у РІНЦ, науковій електронній бібліотеки «КІБЕРЛЕНІНКА»)
3. Berdnyk M. H. Thematic model of and method for solving the Neumann generalized heat-exchange problem for a cylinder with homogeneous layers. *Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Controls*. London: Taylor & Francis Group, 2016. P. 53–59. (Закордонне періодичне видання *Taylor & Francis*.)
4. Бердник М. Г. Математичне моделювання задачі теплообміну рідини на гідродинамічеські початковій ділянці. *Системні технології*. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. 2016. № 1 (102). С. 119–123. (Індексується у *Index Copernicus, Google Scholar*)
5. Бердник М. Г. Математичне моделювання теплообміну кусково-однорідного циліндра, який обертається. *Математичні машини і системи*. 2016. №3. С. 48–54. (Індексується у РІНЦ, науковій електронній бібліотеки «КІБЕРЛЕНІНКА»)
6. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення за допомогою нового інтегрального перетворення узагальненої крайової задачі теплообміну кусково-

однорідного циліндра. *Штучний інтелект*. 2016. № 3 (73). С. 69–77. (Індексується у *Google Scholar*)

7. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурних полів в порожньому циліндрі, який обертається. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. Т. 2, № 3 (58). С. 314–318. (Індексується у *Google Scholar*, *National Library of Ukraine (Vernadsky)*, *РИНЦ (eLibrary)*)

8. Бердник М. Г. Метод рішення просторової узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра за допомогою нового інтегрального перетворення. *Математичні машини і системи*. 2016. № 4. С. 98–105. (Індексується у *РИНЦ*, *науковій електронній бібліотеки «КІБЕРЛЕНІНКА»*)

9. Бердник М. Г. Математичне моделювання узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну порожнього кусково-однорідного циліндра. *Системні технології*. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. 2017. № 1 (108). С. 20–28. (Індексується у *Index Copernicus*, *Google Scholar*)

10. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення просторової узагальненої крайової задачі теплообміну порожнього кусково-однорідного циліндра, який обертається. *Радіoeлектроніка, інформатика, управління*. 2017. № 2. С. 25–32. (Індексується у *Web of Science*)

11. Berdnyk M.H. Mathematical model of and method for solving the Neumann generalized heat-exchange problem for a cylinder with homogeneous layers. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2017. № 4. С. 86–91. (Індексується у *Scopus*)

12. Berdnyk M.H. Analytical solution of the Dirichlet generalized boundary problem of heat-exchange in the finite cylinder with homogeneous layers. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2017. № 6. С. 138–144. (Індексується у *Scopus*)

13. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі Неймана теплообміну ізотропного тіла обертання, яке обертається. *Математичні машини і системи*. 2017. № 4. С. 145–150. (Індексується у *РИНЦ*, *науковій електронній бібліотеки «КІБЕРЛЕНІНКА»*)

14. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну кусково-однорідного циліндра з урахуванням кінцевої швидкості поширення. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Т. 2, № 3 (62). С. 34–41. (Індексується у *Google Scholar*, *National Library of Ukraine (Vernadsky)*, *РИНЦ (eLibrary)*)

15. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі Діріхле теплообміну тіла, яке обертається. *Штучний інтелект*. 2017. № 1 (75). С. 78–85. (Індексується у *Google Scholar*)

16. Berdnyk M. G., Akhmetshina L.G. Mathematical modeling of temperature fields of the rotating cylinder. *Системні технології: регіональний міжвузівський зб. наук. пр.* 2018. № 1 (114). С. 9–16. (Індексується у *Index Copernicus*, *Google Scholar*)

17. Бердник М. Г. Математична модель і метод розв'язання узагальненої задачі теплообміну конуса, який обертається. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Т. 2. № 3 (66). С. 23–28. (Індексується у *Google Scholar*, *National Library of Ukraine (Vernadsky)*, *РИНЦ (eLibrary)*)

18. Berdnyk M.H. The mathematic model of and method for solving the Neumann generalized heat-exchange problem for empty isotropic rotary body. *Науковий вісник Національного гірничого університету*. 2018. № 3. С. 134–138. (Індексується у Scopus)

19. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої змішаної задачі теплообміну порожнього ізотропного тіла обертання. *Математичні машини і системи*. 2018. № 3. С. 125–134. (Індексується у РІНЦ, науковій електронній бібліотеці «КІБЕРЛЕНІНКА»)

20. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурних полів у довільних областях при електронно-променевому зварюванні. *Штучний інтелект*. 2018. № 2. С. 77–82. (Індексується у Google Scholar)

21. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. Switzerland: Trans Tech Publications, 2018. Vol. 277. P. 168–177. (Індексується у Scopus)

22. Berdnyk M. Mathematic Model and Method for Solving the Heat-Exchange Problem in Electron-Beam Welding of Arbitrary Areas. *Materials Properties and Technologies of Processing. Solid State Phenomena*. Switzerland: Trans Tech Publications, 2019. Vol. 291. P. 173–182. URL: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.291.173>. (Індексується у Scopus)

23. 25. Бердник М. Г. Математична модель і метод розв'язання узагальненої змішаної задачі теплообміну однопорожнинного гіперболоїда обертання. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Т. 3, № 2 (69). С. 28–37. (Індексується у Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky), РІНЦ (eLibrary))

24. Бердник М. Г., Алексєєв О.М. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі Діріхле теплообміну параболоїда обертання. *Системні технології*. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. 2019. № 1. С. 12–18. (Індексується у Index Copernicus, Google Scholar)

25. Berdnyk M. H. Mathematic simulation of generalized problem of heat-exchange in the bodies with hemispherical shape. *Системні технології: регіональний міжвузівський зб. наук. пр.* 2019. № 4. С. 16–25. (Індексується у Index Copernicus, Google Scholar)

26. Berdnyk M. H. Mathematic model of and method for solving the dirichlet heat-exchange problem for one-sheet rotary hyperboloid. *Системні технології: регіональний міжвузівський зб. наук. пр.* 2020. № 1. С. 35–46. (Індексується у Index Copernicus, Google Scholar)

27. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурного поля порожнього циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2004. № 8. С. 41–47.

28. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. 2005. №10. С. 197–202.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

29. Бердник М. Г. Улучшение сходимости рядов при применении интегральных преобразований в кусочно-однородных средах. *Наука і освіта '98*: матеріали I міжнар. конф. (Дніпропетровськ-Одеса-Кривий Ріг-Харків-Київ-Дніпродзержинськ, 23–30 квітня 1998 р.). Дніпропетровськ: Наука і освіта, 1998. Т. 11. С. 456.

30. Бердник М. Г. Аналитическое определение нестационарных неосесимметричных температурных полей в бандажированных прокатных валках. *Динаміка наукових досліджень*: матеріали міжнар. наук.-практ. конф. (Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ-Черкаси, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.). Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2002. Т. 11. С. 3.

31. Бердник М. Г. Аналитическое решение динамической связанной задачи термоупругости. *Динаміка наукових досліджень 2004. Технічні науки*. (Дніпропетровськ, 21–30 червня 2004 р.): матеріали III міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. Т. 61. С. 6–7.

32. Бердник М. Г. Аналитическое решение сингулярно возмущенной задачи теплопроводности вращающегося цилиндра. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2004)* (Дніпропетровськ, 17–19 листопада 2004 р.): тези доп. II міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: ДНУ, 2004. С. 26–27.

33. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну порожнього циліндра, який обертається. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2005)* (Дніпропетровськ, 16–18 листопада 2005 р.): тези доп. III міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: ДНУ, 2005. С. 10.

34. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурного поля в конусі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2006)* (Дніпропетровськ, 15–17 листопада 2006 р.): тези доп. IV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. С. 12.

35. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок зв'язаної задачі термопружності для незкінченної пластини. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)* (Дніпропетровськ, 25–27 листопада 2009 р.): тези доп. VII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: ДНУ, 2009. С. 34–35.

36. Бердник М. Г., Гаркуша О. В. Програмне забезпечення розв'язання систем алгебраїчних рівнянь з застосуванням Message Passing Interface. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2011)*: тези доп. IX міжнар. наук.-практ. конф. (Дніпропетровськ, 23–25 листопада 2011 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2011. С. 32–33.

37. Бердник М. Г., Панченко Д. М. Програмно-математичне забезпечення для знаходження власних чисел і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2012)*: тези доп. X ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. (Дніпропетровськ, 21–23 листопада 2012 р.). Дніпропетровськ: ДНУ, 2012. С. 30–31.



38. Бердник М. Г., Гаркуша О. В. Розробка програмного забезпечення з застосування Message Passing Interface для розв'язування задач методом скінченних елементів. *X відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (PSC-IMFS-10)* (Львів, 17–18 травня 2012 р.): зб. матеріалів. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. С. 34–35.

39. Бердник М. Г., Воробйов К. Ю. Чисельне моделювання температурних полів у суцільному циліндрі який обертається. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014)* (Дніпропетровськ, 19–21 листопада 2014 р.): тези доп. XII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: Ліра, 2014. С. 45–46.

40. Бердник М. Г. Математичне моделювання задачі теплообміну рідини, яка обертається. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015)* (Дніпропетровськ, 18–20 листопада 2015 р.): тези доп. XIII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. С. 8–9.

41. Бердник М. Г. Математичне моделювання просторової узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра, який обертається. *Штучний інтелект та інтелектуальні системи (AIIS'2015)* (Бердянськ, 21–26 вересня 2015 р.): матеріали міжнар. наук.-техн. конф. Бердянськ: ППШ, 2015. С. 134–140.

42. Бердник М. Г. Програмно-математичного забезпечення обчислення розріджених матриць з використанням бібліотеки OpenMP. *Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании* (Днепропетровск, 16–17 декабря 2015 г.): тезисы IX междунар. научно-практ. конф. Днепропетровск: ДИИТ, 2015. С. 103.

43. Бердник М. Г. Метод біспряжених градієнтів для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь з застосуванням MPI. *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI'2016)* (Залізний Порт, 24–28 травня 2016 р.): матеріали междунар. научн. конф. Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2016. С. 166–167.

44. Бердник М. Г. Програмне забезпечення побудови і аналізу триангуляції. *Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2016)* (Черкаси, 12–14 травня 2016 р.): тези доп. III міжнар. наук.-практ. конф. Черкаси: ЧДТУ, 2016. С. 130–131.

45. Бердник М. Г., Каревіна Н. П. Математична модель і аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну кусково-однорідного циліндра, який обертається. *Теорія прийняття рішень* (Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016 р.): праці VIII міжнар. школи-семінару. Ужгород: УжНУ, 2016. С. 132–133.

46. Бердник М. Г., Сподинець О.А., Барвіненко Д.М. Порівняння характеристик мов програмування за допомогою алгоритмічних розрахунків. *Проблеми використання інформаційних технологій в освіті, науці та промисловості*: матеріали XIII міжнар. конф. (Дніпро, 23-24 листопада 2017 р.). Дніпро: НТУ «ДП», 2017. С. 63–66.

47. Бердник М. Г., Пашковський І. В. Програмно-математичне забезпечення обчислення розріджених матриць з використанням технології асинхронного програмування. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*

(MPZIS-2017) (Дніпро, 22–24 листопада 2017 р.): тези доп. XV міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро: ДНУ, 2017. С. 19–20.

48. Бердник М. Г., Прус В.С. Програмне забезпечення триангуляції об'єктів із використанням алгоритма bowger-watson. *Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення* (Тернопіль, 13 червня 2017 р.): зб. тез міжнар. наук. інтернет-конф. (Вип. 20). Тернопіль: ФО-П Шпак В.Б., 2017. С. 3–4.

49 Бердник М. Г., Морозов Д. О. Програмне забезпечення для знаходження власних чисел і функцій еліптичного диференціального оператора. *Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення* (Тернопіль, 15 травня 2018 р.): зб. тез доп. міжнар. наук. інтернет-конф. (Вип. 28). Тернопіль: ФО-П Шпак В.Б., 2018. С. 3–4.

50. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі теплообміну конуса, який обертається. *XIX міжнар. конф. з математичного моделювання (МКММ-2018)* (Херсон, 17–21 вересня 2018 р.): зб. тез. Херсон: ХНТУ, 2018. С. 100.

51. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі теплообміну тіл півсферичної форми. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2018)* (Дніпро, 21–23 листопада 2018 р.): тези доп. XVI міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро: ДНУ, 2018. С. 13–14.

52. Berdnyk M. The mathematic model of and method for solving a generalized mixed boundary problem of heat exchange for the empty isotropic rotary body. *Комп'ютерні науки та інформаційні технології (CSIT 2018)* (Львів, 11–14 вересня 2018 р.): матеріали XIII міжнар. наук.-техн. конф. Львів: Вежа і Ко, 2018. Т. 1. С. 173–176.

53. Бердник М. Г., Морозов Д. О. Комп'ютерне моделювання власних чисел і функцій в циліндричній системі координат. *Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення* (Тернопіль, 14 листопада 2019 р.): зб. тез міжнар. наук. інтернет-конф. (Вип. 43). Тернопіль: ФО-П Шпак В.Б., 2019. С. 14–16.

54. Бердник М. Г., Морозов Д. О. Комп'ютерне моделювання власних чисел і функцій диференціального оператора. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2019)* (Дніпро, 20–22 листопада 2019 р.): тези доп. XVII міжнар. наук.-практ. конф. Дніпро: ДНУ, 2019. С. 22–23.

55. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої змішаної задачі теплообміну однопорожнинного гіперболоїда обертання. *XX міжнар. конф. з математичного моделювання (МКММ-2019)*: зб. тез (Херсон, 16–20 вересня 2019 р.). Херсон: ХНТУ, 2019. С. 21–22.

#### **Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:**

56. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ, 2005. С. 37–44.

57. Бердник М. Г. Розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну порожнього циліндра, який обертається. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ, 2006. С. 22–27.

58. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ, 2014. С. 26–35.

59. Бердник М. Г., Воробйов К. Ю. Моделювання нестационарних температурних полів у суцільному циліндрі, який обертається. *Молодий вчений*. 2014. № 10. С. 6–10.

## АНОТАЦІЯ

**Бердник М. Г. Математичні моделі та методи розв'язання узагальнених задач теплообміну тіл, що обертаються.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національна металургійна академія України, Дніпро, 2020.

У дисертації вирішено важливу науково-технічну проблему підвищення точності моделювання явища теплопровідності в тілах, що обертаються, з урахуванням релаксації теплового потоку, що дає змогу підвищити точність розрахунку температурних полів у цих тілах. У роботі вперше отримано диференціальне узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла в криволінійній системі координат. Також вперше побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області  $D \subset R^2$ , обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами, і нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$ .

Отримані результати дозволили вперше побудувати нові математичні моделі процесу теплопровідності в тілах обертання у вигляді узагальнених (із урахуванням релаксації теплового потоку) крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності і розробити нові методи розв'язування відповідних крайових задач.

**Ключові слова:** математичне моделювання, крайова задача, інтегральне перетворення, гіперболічне рівняння теплопровідності, час релаксації, симплекс-елемент.

## ABSTRACT

**Berdnyk M.H. Mathematical Models and Methods for Solving Generalized Problems of Rotating Bodies Heat Exchange.** – Qualification scientific work as a manuscript.

A thesis for obtaining a scientific degree of the Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods. – Dnipro University of Technology. – National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro, 2020.

The work is devoted to the pressing scientific and technical problem of improving the accuracy of modeling the thermal conductivity phenomenon in rotating bodies through taking into consideration a heat flow relaxation that enables to increase accuracy of temperature fields computation in rotating bodies. For the first time a differential generalized energy transfer equation for the driving element of a continuous medium, taking into account the finite velocity of heat propagation in a curvilinear coordinate system, was obtained in the thesis. A new finite integral transformation for the Laplace equation in the arbitrary domain  $D \subset R^2$ , bounded by several closed partially-smooth contours, and a new integral transformation for the Laplace equation in a cylindrical coordinate system for the domain  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(y), \zeta_2(y))\}$  were developed for the first time as well. Finding the nuclei of the constructed finite integral transformations by the finite element method and the Galerkin method for first- and second-order simplex elements were reduced to the solution of a system of algebraic equations. The obtained results allowed to build new mathematical models of the thermal conductivity process in rotating bodies in the form of generalized boundary value problems (taking into account the heat flow relaxation) for the hyperbolic equation of thermal conductivity, and to develop new methods for solving corresponding boundary value problems. Mathematical models for calculating temperature fields in solid and hollow cylinders, as well as in solid and empty two-component cylinders of finite length rotating with a constant angular velocity, taking into account the finite velocity of heat propagation, were built in the form of generalized boundary value problems for hyperbolic equations of thermal conductivity with the Dirichlet and Neumann boundary conditions. Using finite integral transformations for piecewise homogeneous media, as well as the Hankel, Fourier, and Laplace transforms, the temperature fields in the cylinders were found in the form of converging orthogonal series by Bessel and Fourier functions.

Mathematical models for calculating temperature fields in an isotropic and hollow isotropic body rotating with a constant angular velocity were constructed, taking into account the finite velocity of heat propagation as boundary value problems for hyperbolic equations of thermal conductivity with the Dirichlet and Neumann boundary conditions and mixed conditions for a hollow isotropic body. Using the developed new integral transformation for a two-dimensional finite space, the temperature fields in the isotropic and empty isotropic rotating bodies in the form of convergent series by the Fourier functions depending on the boundary conditions were found.

For the first time mathematical models for calculating temperature fields in a paraboloid, a hemispherical body, a thin-walled single-cavity hyperboloid and in a straight circular cone, which rotate with a constant angular velocity, were developed, taking into account the finite velocity of heat propagation in the form of boundary value problems for the thermal conductivity hyperbolic equation with the Dirichlet boundary conditions. With the help of a new integral transformation developed for the 2D finite space, temperature fields were found in these bodies in the form of convergent series by using the Fourier functions.

For the first time a mathematical model for calculating temperature fields in arbitrary domains during the electron beam welding was constructed in the form of a boundary value problem of mathematical physics with the Dirichlet boundary conditions.

Heat flow in the body during the welding was simulated by a point source of heat moving along the contour of the body with a constant velocity and known intensity by using the Dirac function. With the help of a new integral transformation developed for the Laplace equation and the finite element method in the Galerkin form, a temperature field in the form of a convergent series was found.

**Keywords:** mathematical modeling, boundary value problem, integral transformation, hyperbolic equation of thermal conductivity, relaxation time, simplex element.